Universität des Saarlandes
Lehrstab Statistik
apl. Prof. Dr. Martin Becker

12. Übungsblatt zur Vorlesung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung SS 2023

Aufgabe 55

In der folgenden Tabelle ist die (gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung des zweidimensionalen diskreten Zufallsvektors (X, Y) gegeben:

X \ Y	1	2	3
1	0.02	0.13	0.15
2	0.16	0.20	0.14
3	0.12	0.04	0.04

(a) Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung um die beiden Randverteilungen.

(b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $P\{1 \leq X \leq 2,\, 2 \leq Y \leq 3\}$,

(ii) $P\{X \leq 2\}$,

(iii) $P\{X > 2, Y < 3\}$.

(c) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X unter der Bedingung $Y = y_j$ für alle $y_j \in T(Y)$ über die zugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeitsfunktionen an.

(d) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort mit den Resultaten aus Teil (c)!

Aufgabe 56

Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) habe die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X \ Y	3	4	5
1	1/6	0	1/6
2	1/12	1/3	0
3	0	1/6	1/12

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{E}(Y)$ sowie die Varianzen $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

(b) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ und den Korrelationskoeffizenten $\mathrm{Korr}(X, Y)$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $4X - 2Y + 3$.

Aufgabe 57

Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) besitze die folgende gemeinsame Dichtefunktion:

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\, f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} y - x + 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie eine Randdichte f_X von X sowie eine Randdichte f_Y von Y.

(b) Vergleichen Sie das Produkt der beiden Randdichten mit der angegebenen gemeinsamen Dichtefunktion. Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(c) Geben Sie für $0 \leq y \leq 1$ bedingte Dichtefunktionen $f_{X|Y=y}$ von X gegeben $Y = y$ an.

(d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von X und Y.

(e) Berechnen Sie die Kovarianz sowie den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

Aufgabe 58

Gegeben sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) mit $X \sim N(4, 2^2)$ und $Y \sim \text{Exp}(0.5)$, das heißt, die Randverteilungen von X bzw. Y seien eine Normalverteilung mit Parametern $\mu_X = 4$ und $\sigma_X^2 = 2^2$ bzw. eine Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_Y = 0.5$.

(a) In welchem Bereich muss die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ liegen?

(b) Es sei nun bekannt, dass $\text{Korr}(X, Y) = 0.5$ gilt. Berechnen Sie:

- (i) $\text{Cov}(4X, -2Y)$,
- (ii) $\text{E}(4X - 2Y + 2)$,
- (iii) $\text{Var}(4X - 2Y + 2)$.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $4X^2 - 4Y^2$.