

2. Übungsblatt zum Wiederholungskurs Schließende Statistik SS 2025

Aufgabe 2

Es werde angenommen, dass die Lebensdauer Y von Autobatterien [in Jahren] der folgenden Verteilungsfunktion genügt:

$$F_Y(y|\lambda) = F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y^2} & \text{für } y > 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0.$$

Bei 8 PKW stellte man folgende Lebensdauern der Autobatterien fest:

$$4, 3, 5, 7, 6, 9, 6, 8$$

Schätzen Sie den Parameter λ mit Hilfe der Momentenmethode.

Hinweis: $E(Y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.

Aufgabe 3

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekanntes Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} a^2 \cdot (y-1) \cdot e^{-a \cdot (y-1)} & \text{für } y > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter a soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe X_1, \dots, X_n vom Umfang n geschätzt werden.

- Bestimmen Sie den Schätzer \hat{a}_{ML} nach der Maximum-Likelihood-Methode.
- Man kann zeigen, dass $E(Y) = \frac{2}{a} + 1$ gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer \hat{a}_{MM} nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.

Aufgabe 4

Eine Zufallsvariable Y besitze für ein θ mit $0 < \theta < 1$ die folgende Dichtefunktion:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} \frac{1-\theta}{\theta} \cdot y \cdot \frac{1-2\theta}{\theta} & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine einfache Stichprobe (X_1, \dots, X_n) zu Y ergab die Realisation (x_1, \dots, x_n) . Schätzen Sie den unbekannt Parameter θ mit Hilfe der Maximum-Likelihoodmethode.

*Hinweis: Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Aufgabe 5

Die Verteilung der Zufallsvariablen Y , die vom unbekannt Parameter $\phi > 0$ abhängt, sei durch die Dichtefunktion

$$f_Y(y|\phi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\phi}{2\pi y^3}} e^{-\phi \frac{(y-1)^2}{2y}} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{für } y \leq 0 \end{cases}$$

gegeben.

Der Parameter ϕ soll auf der Grundlage der einfachen Stichprobe (X_1, \dots, X_n) vom Umfang n zu Y mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden.

- Stellen Sie die logarithmierte Likelihoodfunktion $\ln L(\phi)$ auf.
- Berechnen Sie den ML-Schätzer $\hat{\phi}$ für ϕ .

Aufgabe 6

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannt Parameters $a > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|a) = \begin{cases} \frac{2}{a^2} \cdot y & \text{für } 0 \leq y \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter a soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe X_1, \dots, X_n vom Umfang n geschätzt werden.

- Zeigen Sie, dass $E(Y) = \frac{2}{3} \cdot a$ gilt.
- Bestimmen Sie den Schätzer \hat{a}_{MM} nach der Methode der Momente.
- Bestimmen Sie den Schätzer \hat{a}_{ML} nach der Maximum-Likelihood-Methode.

Hinweise:

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) mit dem angegebenen Resultat auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.