

3. Übungsblatt zum Wiederholungskurs  
Schließende Statistik SS 2025

Aufgabe 7

Es sei  $X_1, \dots, X_n$  eine einfache Stichprobe zur Zufallsvariablen  $Y$  mit  $E(Y) = \mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , und  $\text{Var}(Y) = \sigma^2$ ,  $\sigma^2 > 0$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\overline{X^2}$  keine erwartungstreue Schätzfunktion für  $\mu^2$  ist.
- (b) Geben Sie den Bias für die Schätzfunktion in Aufgabenteil (a) an.

Aufgabe 8

Es werde angenommen, dass die Verteilung einer Zufallsvariable  $Y$  in Abhängigkeit des unbekanntem Parameters  $b > 0$  durch die Dichtefunktion

$$f_Y(y|b) = \begin{cases} b \cdot y^{b-1} & \text{falls } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Eine einfache Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  zu  $Y$  ergab die Realisation  $(x_1, \dots, x_n)$ . Prüfen Sie nach, ob  $\overline{X}$  eine erwartungstreue Schätzfunktion für  $b$  ist.

Aufgabe 9

Die Zufallsvariable  $Y$  sei alternativverteilt mit unbekanntem Parameter  $p \in [0, 1]$ , es gelte also insbesondere  $E(Y) = p$  und  $\text{Var}(Y) = p \cdot (1 - p)$ .  $p$  soll mit Hilfe einer einfachen Stichprobe  $(X_1, X_2, X_3)$  vom Umfang 3 zu  $Y$  geschätzt werden.

- (a) Welche der beiden Schätzfunktionen
  - (i)  $T_1 = \frac{1}{3} \cdot (X_1 + X_2 + X_3)$
  - (ii)  $T_2 = (X_1 + X_2 - X_3)$sind erwartungstreu für  $p$ ? (Begründung!)
- (b) Berechnen Sie die Varianz von  $T_1$  und  $T_2$ .
- (c) Welche der beiden Schätzfunktionen würden Sie vorziehen? (Begründung!)

Aufgabe 10

Für  $\lambda > 0$  sei  $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$  (es gilt also insbesondere  $E(Y) = \text{Var}(Y) = \lambda$ ),  $X_1, \dots, X_n$  sei für  $n \in \mathbb{N}$  eine einfache Stichprobe vom Umfang  $n$  zu  $Y$ .

- (a) Zeigen Sie: Die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 - X_i)$$

sind erwartungstreu für  $\lambda^2$ .

- (b) Welche Eigenschaft müssen die Schätzfunktionen  $T_n$  aus Teil (a) außerdem erfüllen, um für  $\lambda^2$  konsistent im quadratischen Mittel zu sein?  
(Die Gültigkeit dieser Eigenschaft ist **nicht** zu überprüfen!)

### Aufgabe 11

Um eine Aussage über die Lebensdauer  $Y$  von Scheibenbremsen zu treffen, wurde in einer Stichprobe von 100 Autos die Lebensdauer der Scheibenbremsen gemessen. Man erhielt dabei den Durchschnittswert

$$\bar{x} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = 60000 \text{ [km]}.$$

Es werde angenommen, dass die Lebensdauer  $Y$  als eine  $N(\mu, 10000^2)$ -verteilte Zufallsvariable angesehen werden kann ( $x_1, \dots, x_{100}$ ) Realisation einer einfachen Stichprobe ( $X_1, \dots, X_{100}$ ) zu  $Y$  ist.

- Geben Sie ein (symmetrisches) Konfidenzintervall für die durchschnittliche Lebensdauer der Scheibenbremsen zur Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.95$  an.
- Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit die Abweichung  $|\bar{X} - \mu|$  mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% kleiner als 5000 ist?

### Aufgabe 12

Zur Intervallschätzung des Erwartungswerts  $\mu := E(Y)$  einer normalverteilten Zufallsvariablen  $Y$  mit bekannter Varianz  $\sigma^2 = 2^2$  auf Grundlage der Realisation  $x_1, \dots, x_9$  einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_9$  vom Umfang 9 zu  $Y$  soll ein symmetrisches Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 0.99$  für  $\mu$  bestimmt werden.

- Wie breit ist ein solches Konfidenzintervall stets?
- Geben Sie das realisierte Konfidenzintervall für  $\mu$  zur folgenden Stichprobenrealisation an:

18.21, 20.37, 23.18, 17.74, 19.84, 20.26, 21.42, 19.52, 23.97

### Aufgabe 13

12 Versuchsflächen wurden mit einer neuen Weizensorte bestellt. Diese Flächen erbrachten folgende Hektarerträge (in dz):

35.6, 33.7, 37.8, 31.2, 37.2, 34.1, 35.8, 36.6, 37.1, 34.9, 35.6, 34.0

Es werde angenommen, dass die obigen Hektarerträge Realisationen einer einfachen Stichprobe  $X_1, X_2, \dots, X_{12}$  zur Zufallsvariablen  $Y$  sind, welche  $N(\mu, \sigma^2)$  verteilt ist für ein  $\mu \in \mathbb{R}$  und ein  $\sigma^2 > 0$ . Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha = 0.95$  für  $\mu$  an.

### Aufgabe 14

In einer Befragungsaktion möchte man den Anteil der Haushalte, die einen DVD-Recorder besitzen, ermitteln. Eine Befragung von 400 Haushalten ergab, dass 80 von ihnen über einen DVD-Recorder verfügten.

- Geben Sie zur Sicherheitswahrscheinlichkeit  $1 - \alpha = 0.90$  ein zweiseitiges Konfidenzintervall für unbekanntem Anteil  $p$  der Haushalte an, die über einen DVD-Recorder verfügen.
- Wie breit ist das in Teil (a) berechnete Konfidenzintervall?
- Welche Breite hätte das resultierende Konfidenzintervall, wenn 200 der befragten Haushalte angegeben hätten, über einen DVD-Recorder zu verfügen?

*Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Ausschnitt aus der Tabelle für gängige Quantile der  $t$ -Verteilungen.*

$n \backslash p$	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
399	1.038	1.284	1.649	1.966	2.336	2.588	3.315