

2. Übungsblatt zur Vorlesung  
Schließende Statistik WS 2023/24

Aufgabe 2

Es sei  $Y$  eine mit Parameter  $p$ ,  $0 < p < 1$ , geometrisch verteilte Grundgesamtheit,  $Y$  habe also die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_Y(i|p) = p_Y(i) = \begin{cases} (1-p)^i \cdot p & \text{falls } i \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- (a) Sei  $X_1, \dots, X_n$  eine einfache Stichprobe vom Umfang  $n$  zu  $Y$  und  $x_1, \dots, x_n$  die Realisation zu  $X_1, \dots, X_n$ . Berechnen Sie (in Abhängigkeit von der Stichprobenrealisation  $x_1, \dots, x_n$ ) den ML-Schätzer für  $p$ .
- (b) Bekanntlich ist die Anzahl der Misserfolge einer Bernoulli-Kette vor dem ersten Erfolg geometrisch verteilt, wobei der Parameter die Erfolgswahrscheinlichkeit des Bernoulli-Experiments ist.

Um die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer „6“ bei einem bestimmten Würfel zu schätzen, wurde 10-mal solange gewürfelt, bis zum ersten Mal eine „6“ gefallen war, und die Anzahl der vorangegangenen (Fehl-)Würfe notiert. Berechnen Sie aus der so erhaltenen Stichprobenrealisation

$$(x_1, \dots, x_{10}) = (3, 2, 14, 0, 7, 3, 6, 8, 0, 3)$$

mit Hilfe von Teil (a) den ML-Schätzer der Wahrscheinlichkeit, mit dem Würfel eine „6“ zu würfeln.

- (c) Der Erwartungswert einer mit Parameter  $p$  geometrisch verteilten Zufallsvariable ist bekanntlich  $\frac{1-p}{p}$ . Berechnen Sie nun den zur in Teil (b) angegebenen Stichprobenrealisation gehörigen Schätzwert für  $p$  nach der Methode der Momente. In welchem Verhältnis steht der erhaltene Wert zum Ergebnis aus Teil (b)?

Aufgabe 3

Eine Zufallsvariable  $Y$  besitze die folgende Dichtefunktion:

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} (\theta + 1) \cdot y^\theta & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad -1 < \theta < \infty$$

Eine einfache Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  zu  $Y$  ergab die Realisation  $(x_1, \dots, x_n)$ .

- (a) Schätzen Sie den unbekannt Parameter  $\theta$  mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode.
- (b) Zeigen Sie, dass  $E(Y) = \frac{\theta + 1}{\theta + 2}$  gilt.
- (c) Schätzen Sie den unbekannt Parameter  $\theta$  mit Hilfe der Momentenmethode.

- (d) Berechnen Sie die realisierten Schätzer  $\hat{\theta}_{MM}$  nach der Momentenmethode sowie  $\hat{\theta}_{ML}$  nach der ML-Methode zur Stichprobenrealisation

0.6427, 0.7193, 0.8305, 0.9684, 0.5864, 0.9649, 0.9812, 0.871 .

#### Aufgabe 4

Die Verteilung einer Zufallsvariablen  $Y$  sei in Abhängigkeit des unbekanntes Parameters  $a > 0$  durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2ay \cdot e^{-a \cdot y^2} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter  $a$  soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden.

- (a) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{a}_{ML}$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.
- (b) Man kann zeigen, dass  $E(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{4 \cdot a}}$  gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer  $\hat{a}_{MM}$  nach der Methode der Momente.

*Hinweise:*

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.

#### Aufgabe 5

Die Verteilung einer Zufallsvariablen  $Y$  sei in Abhängigkeit des unbekanntes Parameters  $\lambda > 0$  durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{\lambda^2} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\lambda^2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter  $\lambda$  soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden.

- (a) Bestimmen Sie den Schätzer  $\hat{\lambda}_{ML}$  nach der Maximum-Likelihood-Methode.
- (b) Man kann zeigen, dass  $E(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \lambda$  gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer  $\hat{\lambda}_{MM}$  nach der Methode der Momente.

*Hinweise:*

- Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.
- Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss **nicht** überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.