

**WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHES
PRÜFUNGSSEKRETARIAT**

FAKULTÄT FÜR EMPIRISCHE HUMANWISSENSCHAFTEN UND WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFT
DER UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Von der/dem Studierenden auszufüllen (Bitte leserlich und in Blockschrift):

Name der Prüfung: Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Semester, dem die Prüfung zugeordnet ist: SS 2024 (z. B. WS 2019/2020, SS 2020)
(Prüfungen im Februar/April = WS; Prüfungen im August/Oktobre = SS)

Nachname, Vorname der/des Studierenden: _____

Matrikelnummer der/des Studierenden: _____

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass mir die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der für mich geltenden Prüfungsordnung bekannt sind.

Mir ist damit bewusst, dass diese Prüfungsleistung als nicht abgelegt zählt, wenn die hierfür vorgesehenen Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

Mir ist bekannt, dass die Teilnahme an der Prüfung zudem die ordnungsgemäße Anmeldung zur Prüfung voraussetzt. Die Teilnahme bei versäumter Anmeldung hat die Ungültigkeit der Prüfung zur Folge.

Zudem ist mir bekannt, dass eine nicht bestandene Prüfung zweimal wiederholt werden kann. Die Wiederholung einer bestandenen Prüfung ist nicht zulässig.

Datum: _____ **Unterschrift der/des Studierenden:** _____

Von der Prüferin/Vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	Punkte	Max. Punkte	Bemerkungen
1		18	
2		15	
3		11	
4		19	
5		6	
6		9	
7		16	
8		18	
9		8	
<i>Summe</i>		120	

bestanden Note: _____

nicht bestanden Unterschrift der Prüferin/des Prüfers: _____

KLAUSURHEFT ZUR
 BACHELOR-PRÜFUNG
 DESKRIPTIVE STATISTIK UND WAHRSCHEINLICKEITSRECHNUNG
 SOMMERSEMESTER 2024

apl. Prof. Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 18 + 15 + 11 + 19 + 6 + 9 + 16 + 18 + 8) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbstgestaltete DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbstgestaltete (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.
- Alle Punkte innerhalb von Zahlen sind stets Dezimalpunkte (und keine Tausenderpunkte).

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben						
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Σ
1		■	■	■	■	
2		■	■	■	■	
3					■	
4						
5			■	■	■	
6				■	■	
7						
8						
9				■	■	
Σ						

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

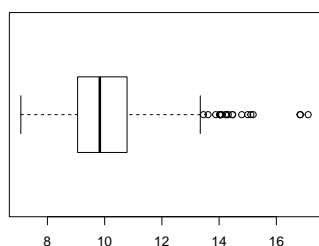
- | | wahr | falsch |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke eines Histogramms beträgt stets 1. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Wenn Sie mit einem Elektrofahrzeug 300 km bei einem durchschnittlichen Verbrauch von 20 kWh pro 100 km und anschließend 200 km bei einem durchschnittlichen Verbrauch von 15 kWh pro 100 km zurücklegen, so beträgt der Gesamtdurchschnitt des Verbrauchs 18 kWh pro 100 km. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Modalwerte eines Merkmals X können nur dann bestimmt werden, wenn das Merkmal X ordinal- oder kardinalskaliert ist. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Wenn die Aufstellung einer 4×400 -m-Staffel aus der Auswahl von 4 aus 6 Kadersportlerinnen sowie der Festlegung der Reihenfolge für die ausgewählten 4 Sportlerinnen besteht, so gibt es für die Aufstellung insgesamt 360 Möglichkeiten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. In einem Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum ist die Anzahl der Elemente in Ω stets endlich. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$ mit $0 < P(A) < 1$. Dann gilt stets: | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $P(B A) + P(B \bar{A}) = 1$ | | |
| 7. Binomialverteilte Zufallsvariablen sind stets symmetrisch (um ihren Erwartungswert) verteilt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. Gilt $\text{Cov}(X, Y) = 0$ für zwei Zufallsvariablen X und Y , so gilt stets auch $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9. Liegen alle Trägerpunkte eines zweidimensionalen diskreten Zufallsvektors (X, Y) auf einer Geraden mit der Steigung 0.3, so gilt $\text{Korr}(X, Y) = 0.3$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.

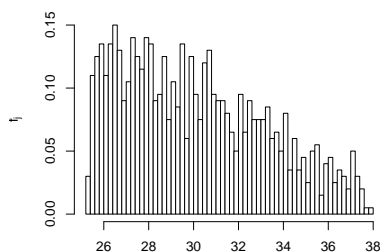
Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften der folgende Box-Plot *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und rechtssteil
- (b) leptokurtisch und linkssteil
- (c) platykurtisch und rechtssteil
- (d) platykurtisch und linkssteil

2. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



- (a) leptokurtisch und rechtssteil
- (b) leptokurtisch und linkssteil
- (c) platykurtisch und rechtssteil
- (d) platykurtisch und linkssteil

3. Die Ränge $\text{rg}(X)_1, \dots, \text{rg}(X)_8$ zur (der Einfachheit halber sortierten) Urliste

sehr zufrieden, sehr zufrieden, zufrieden, zufrieden,
weniger zufrieden, unzufrieden, unzufrieden, unzufrieden

des ordinalskalierten Merkmals X lauten:

- (a) 1, 1, 3, 3, 5, 6, 6, 6
- (b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4
- (c) 1.5, 1.5, 3.5, 3.5, 4, 6.5, 6.5, 6.5
- (d) 1.5, 1.5, 3.5, 3.5, 5, 7, 7, 7

4. Die Anzahl der verschiedenen (sechsstelligen) Zahlen, die aus den Ziffern 3, 3, 5, 5, 8, 9 gebildet werden können, beträgt:

(a) 180

(b) 256

(c) 720

(d) 16200

5. Sind X_1 , X_2 und X_3 drei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 \sim N(40, 6^2)$, $X_2 \sim N(40, 9^2)$ und $X_3 \sim N(40, 2^2)$, dann ist die Verteilung von $X_1 + X_2 + X_3$ eine

(a) $N(40, 11^2)$ -Verteilung.

(b) $N(40, 17^2)$ -Verteilung.

(c) $N(120, 11^2)$ -Verteilung.

(d) $N(120, 17^2)$ -Verteilung.

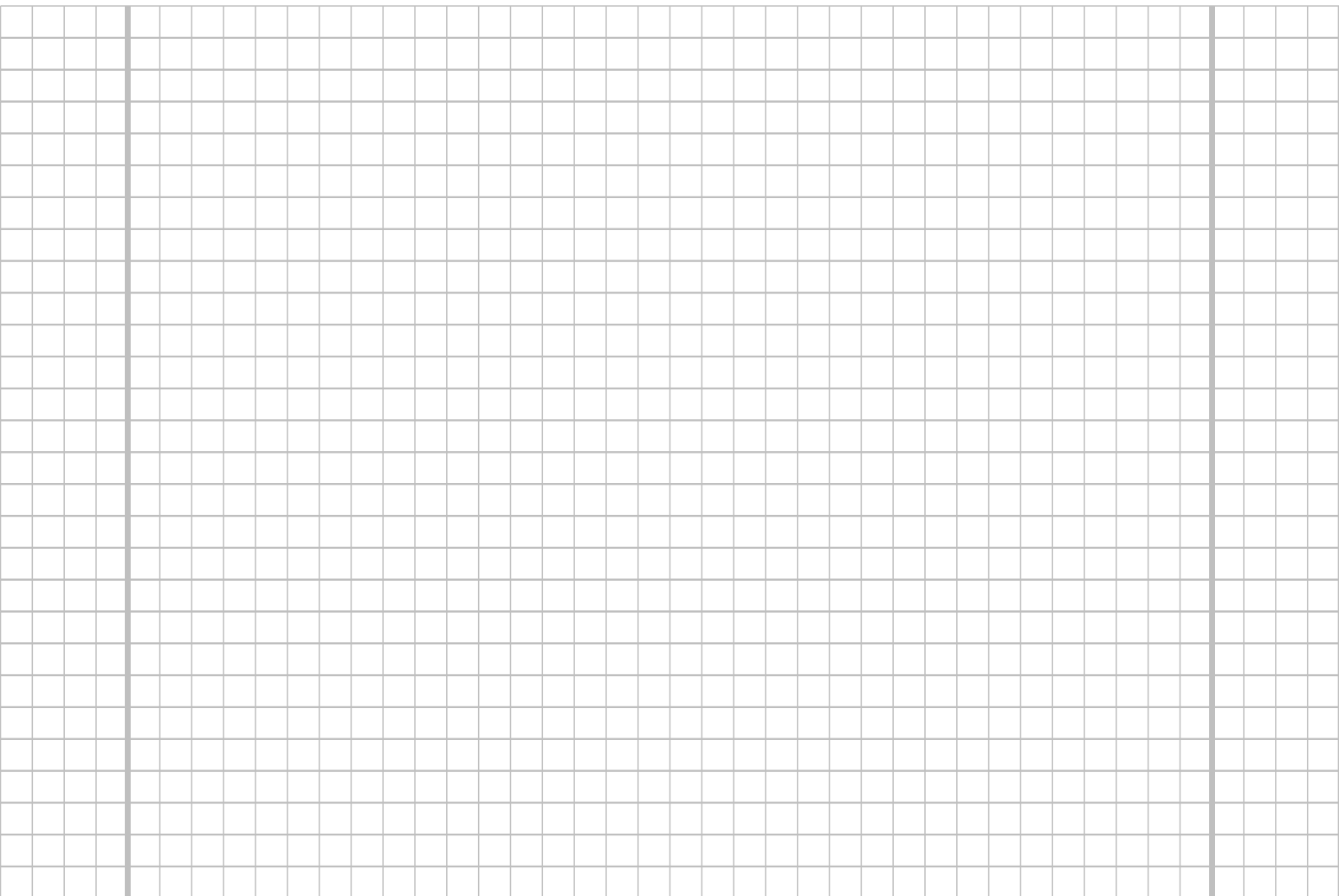
Aufgabe 3 (4 + 1 + 5 + 1 = 11 Punkte)

Zu einem erhobenen Merkmal X sei die folgende empirische Verteilungsfunktion gegeben:

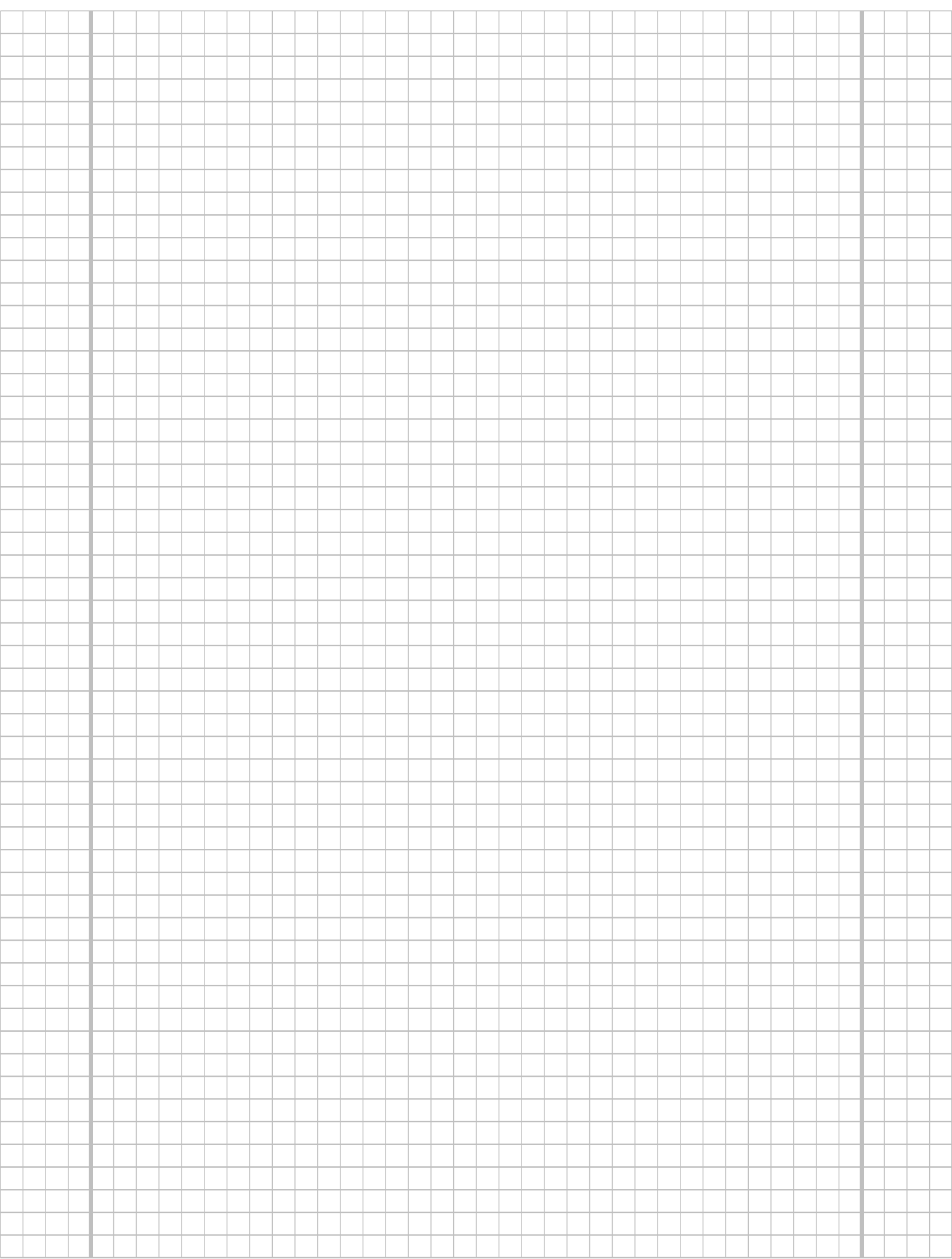
$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{für } x < 1 \\ 0.14 & \text{für } 1 \leq x < 3 \\ 0.56 & \text{für } 3 \leq x < 5 \\ 0.80 & \text{für } 5 \leq x < 7 \\ 0.92 & \text{für } 7 \leq x < 9 \\ 0.98 & \text{für } 9 \leq x < 11 \\ 1.00 & \text{für } x \geq 11 \end{cases}$$

Außerdem sei die Länge der Urliste $n = 50$ bekannt.

- (a) Erstellen Sie eine Tabelle der absoluten und relativen Häufigkeiten.
- (b) Wie groß ist der Anteil der Urlisteneinträge, die Werte von weniger als 7 annehmen?
- (c) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die empirische Varianz des Merkmals X .
- (d) Bestimmen Sie einen Median des Merkmals X .









Aufgabe 4 (6 + 4 + 3 + 3 + 3 = 19 Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 40$ gegeben:

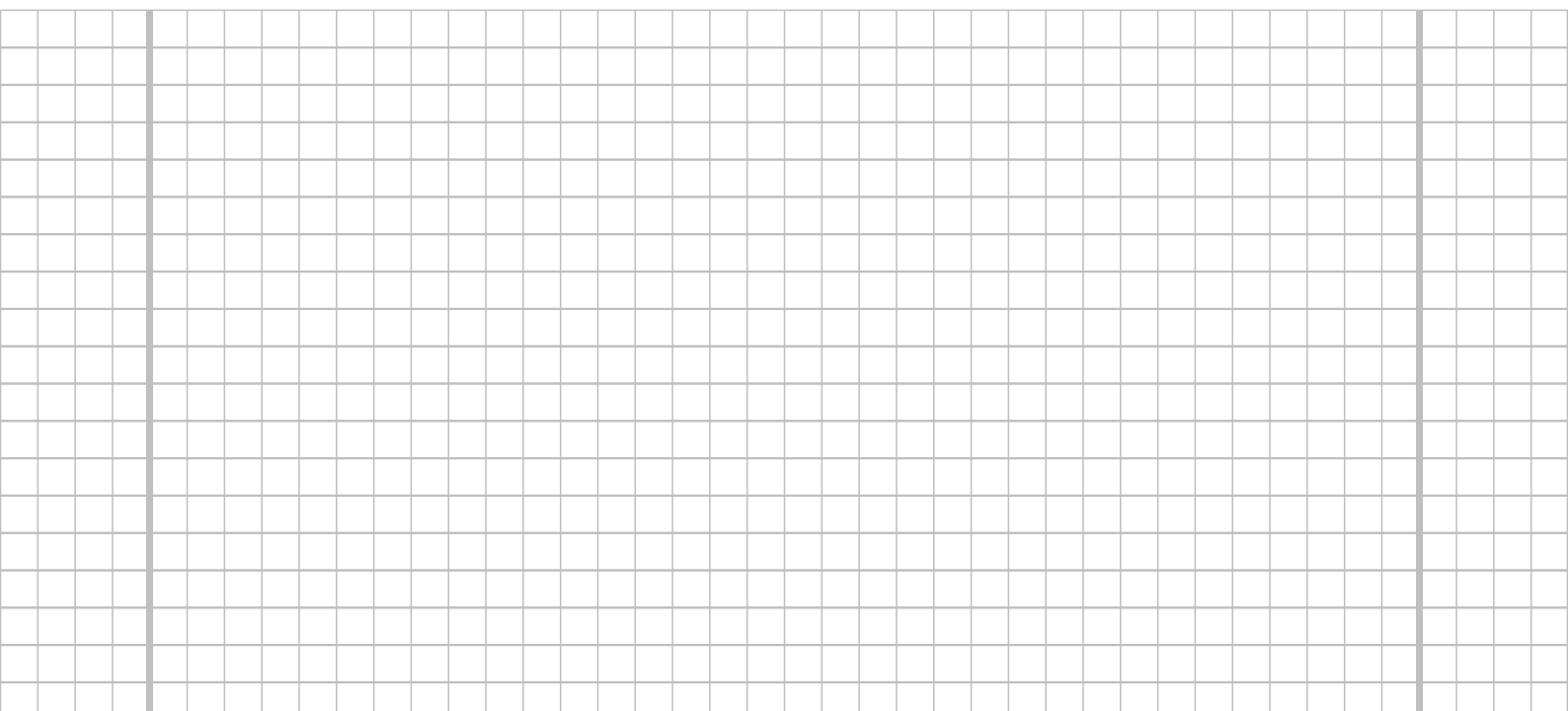
11.70, 13.29, 15.84, 18.11, 18.50, 18.97, 22.60, 25.97, 28.00, 29.55, 30.85, 31.83,
32.40, 34.77, 36.13, 39.02, 43.25, 45.80, 46.16, 46.42, 47.66, 48.76, 50.40, 51.25,
55.03, 58.24, 58.41, 61.45, 61.68, 64.21, 64.68, 65.15, 65.19, 70.37, 72.18, 76.02,
77.70, 78.69, 83.57, 86.68

- (a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

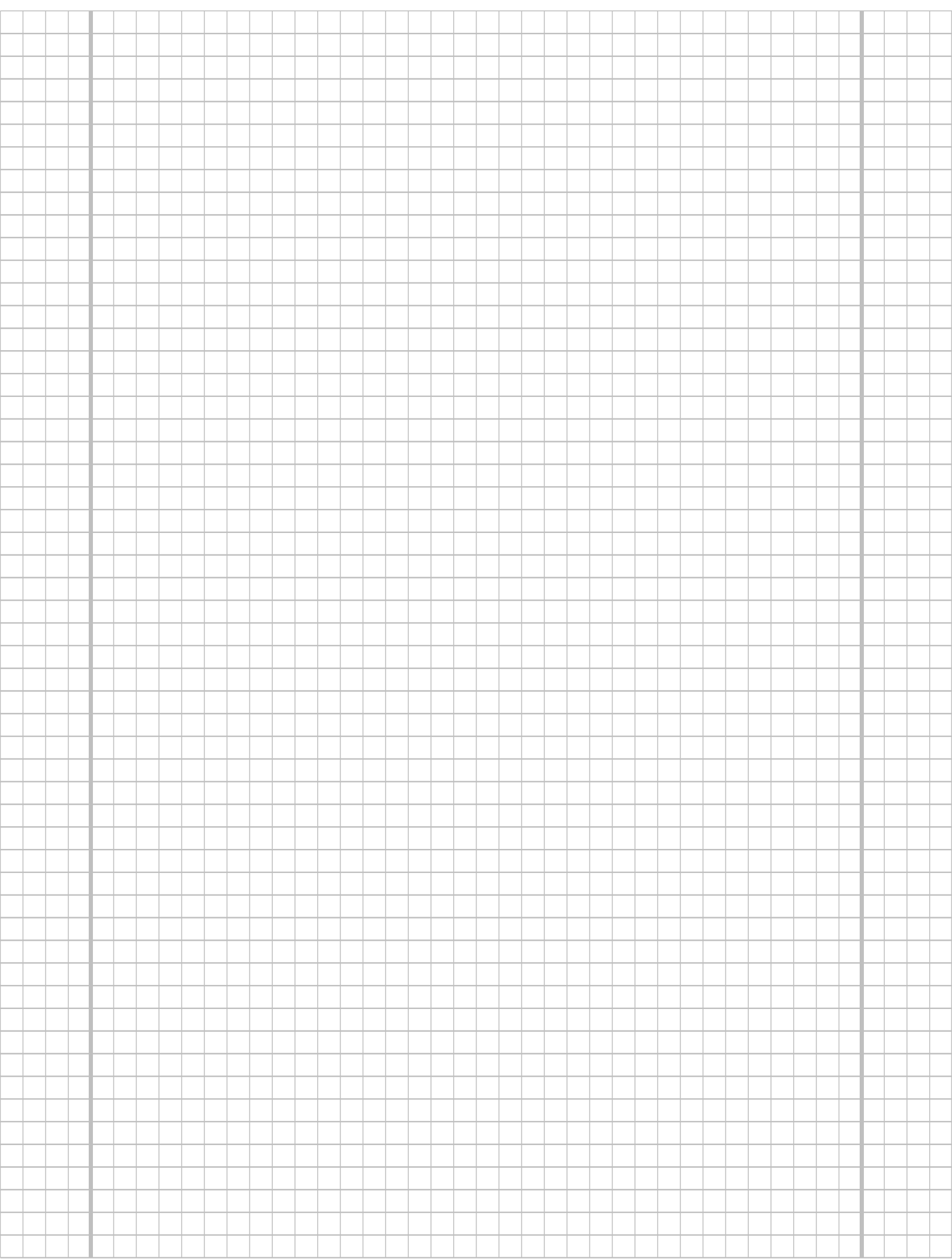
$$K_1 = (10, 20], K_2 = (20, 40], K_3 = (40, 60], K_4 = (60, 100]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

- (b) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.
- (c) Berechnen Sie aus den klassierten Daten den (approximativen) arithmetischen Mittelwert der Daten. Wie groß ist die relative Abweichung vom tatsächlichen (aus der Urliste bestimmten) Mittelwert von 47.162?
- (d) Bestimmen Sie (aus der Urliste) die Anzahl von Merkmalswerten zwischen 20 und 50. Welche Näherung für diese Anzahl können Sie aus der in Teil (b) aufgestellten empirischen Verteilungsfunktion berechnen?
- (e) Bestimmen Sie (unter Verwendung der bekannten Konvention zur eindeutigen Festlegung von Quantilen bei kardinalskalierten Merkmalen) *das* untere Quartil sowohl exakt aus der Urliste als auch approximativ mit Hilfe der Verteilungsfunktion für die klassierten Daten.





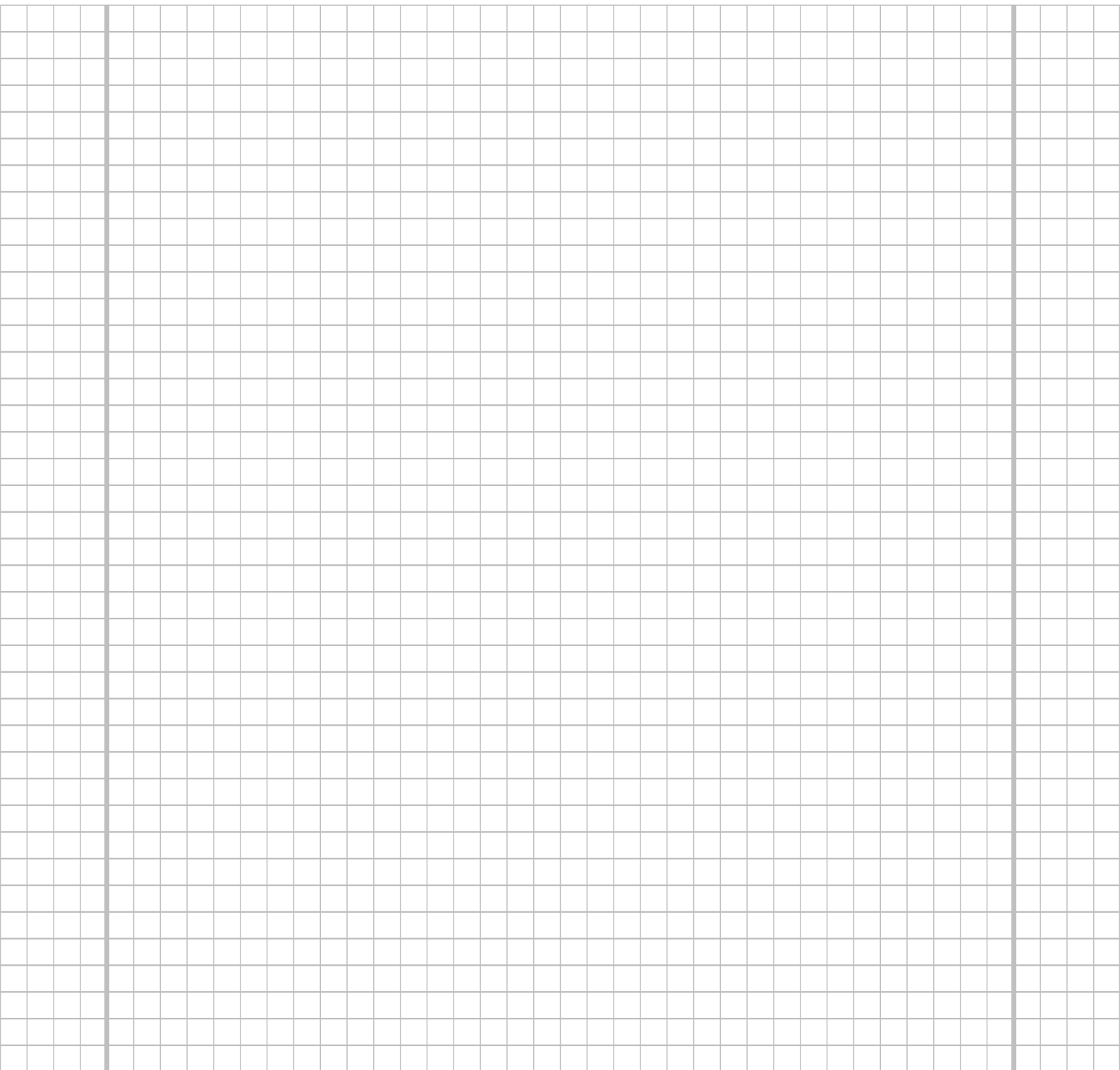




Aufgabe 5 (4 + 2 = 6 Punkte)

Von den Unternehmen, die sich auf einer 2-tägigen Messe präsentieren, sind 5% nur am 1. Tag sowie 10% nur am 2. Tag vertreten (die restlichen 85% sind an beiden Tagen vertreten).

- (a) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein (zufällig ausgewähltes) Unternehmen, das am 1. Tag vertreten war, auch am 2. Tag vertreten ist?
- (b) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein (zufällig ausgewähltes) Unternehmen, das am 2. Tag vertreten ist, nicht schon am 1. Tag vertreten war?

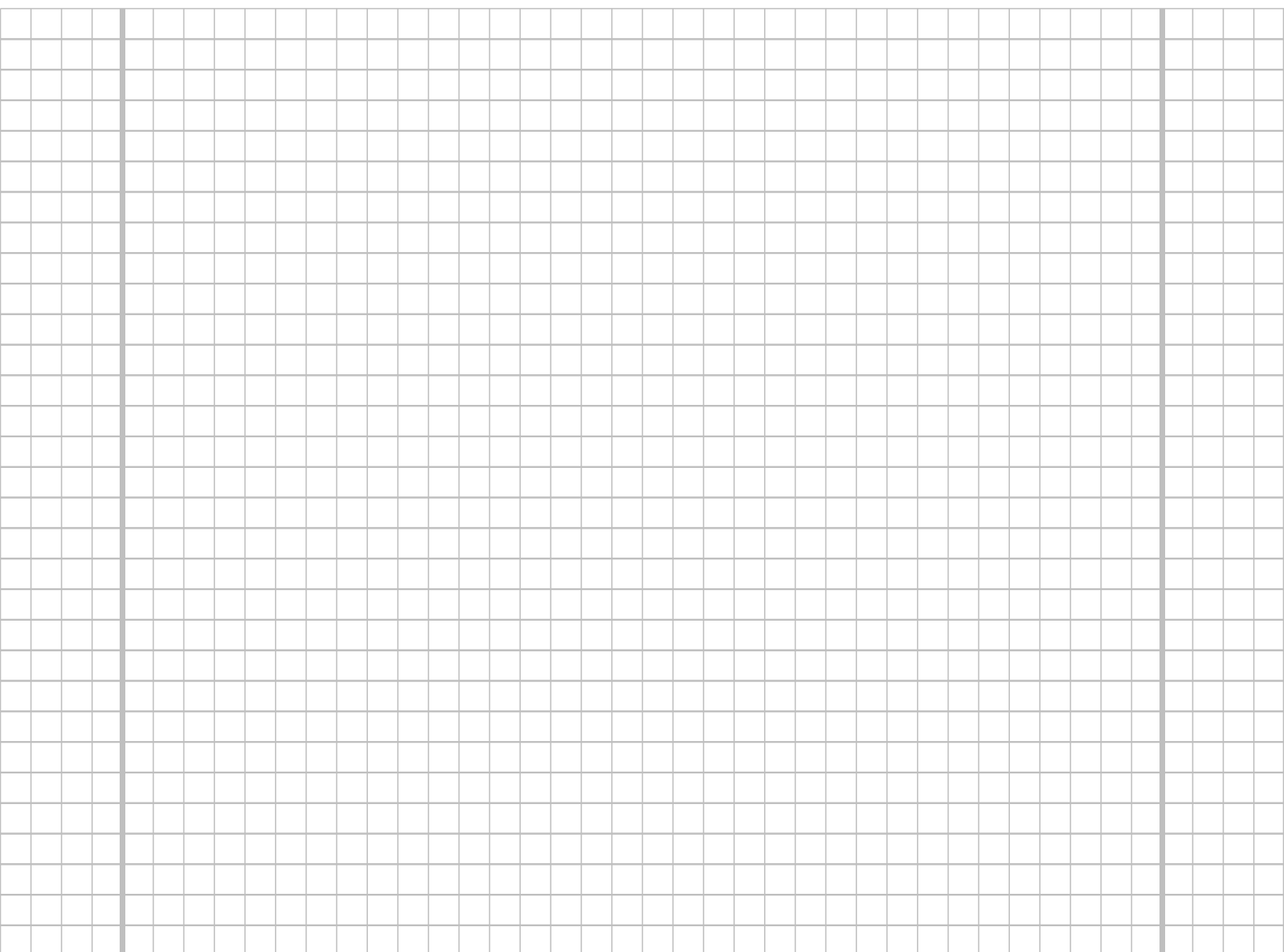




Aufgabe 6 (6 + 2 + 1 = 9 Punkte)

In einer Fußballmannschaft sind die vier Mitspielerinnen Anna, Beate, Christine und Diana für die Ausführung von Eckstößen zuständig. Dabei werden Eckstöße mit einer Wahrscheinlichkeit von 35% von Anna, mit einer Wahrscheinlichkeit von 35% von Beate, mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% von Christine und mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% von Diana ausgeführt. Aus einer ausführlichen statistischen Auswertung ist bekannt, dass Eckstöße von Anna mit einer Wahrscheinlichkeit von 18%, Eckstöße von Beate mit einer Wahrscheinlichkeit von 15%, Eckstöße von Christine mit einer Wahrscheinlichkeit von 12% und Eckstöße von Diana mit einer Wahrscheinlichkeit von 9% zu einem Tor führen.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Eckstoß nicht zu einem Tor führt?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Eckstoß, der zu einem Tor geführt hat, von Christine ausgeführt wurde?
- (c) Sind die Ereignisse „Eckstoß führt zu einem Tor“ und „Eckstoß wird von Christine ausgeführt“ stochastisch unabhängig?



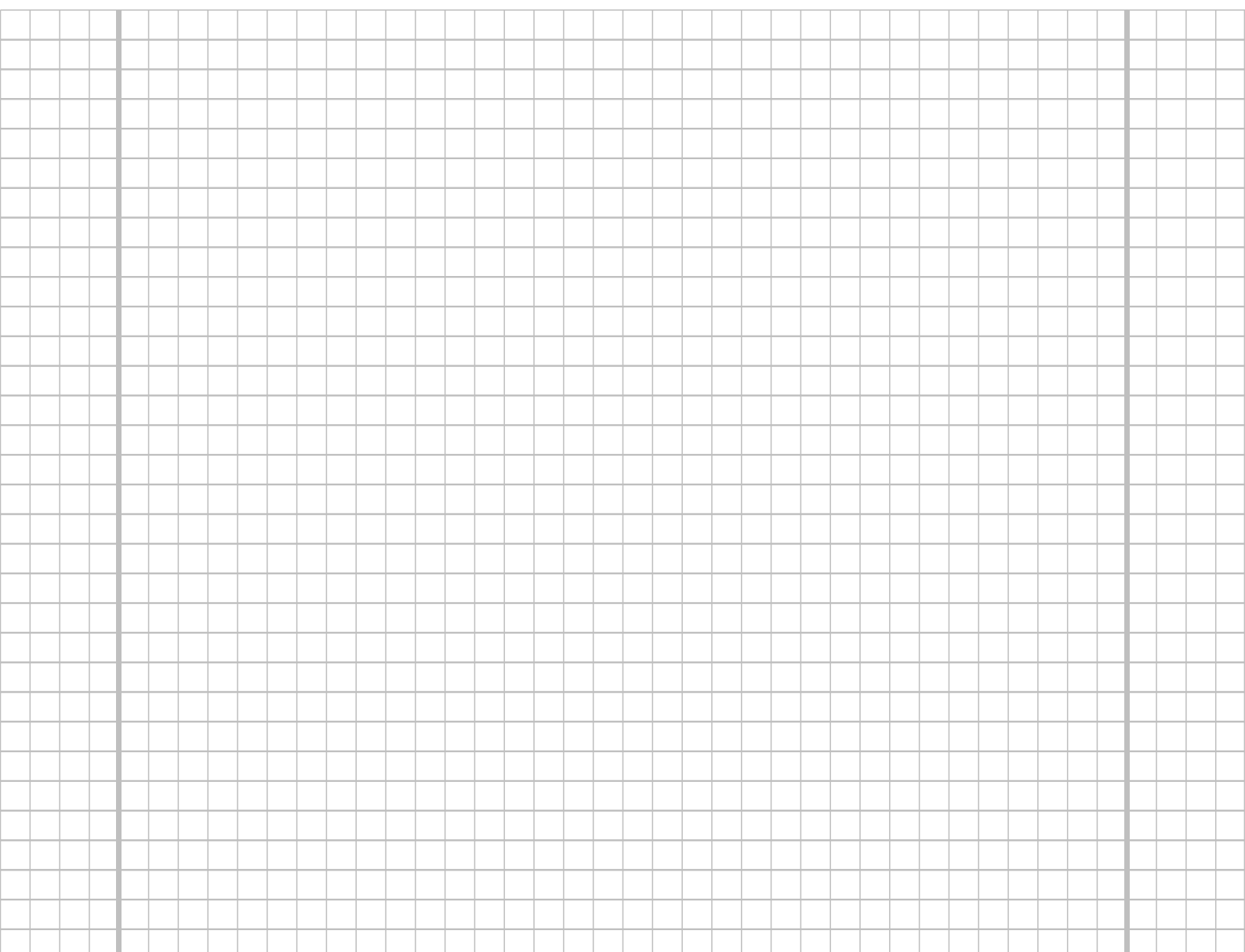


Aufgabe 7 (3 + 2 + 6 + 1 + 4 = 16 Punkte)

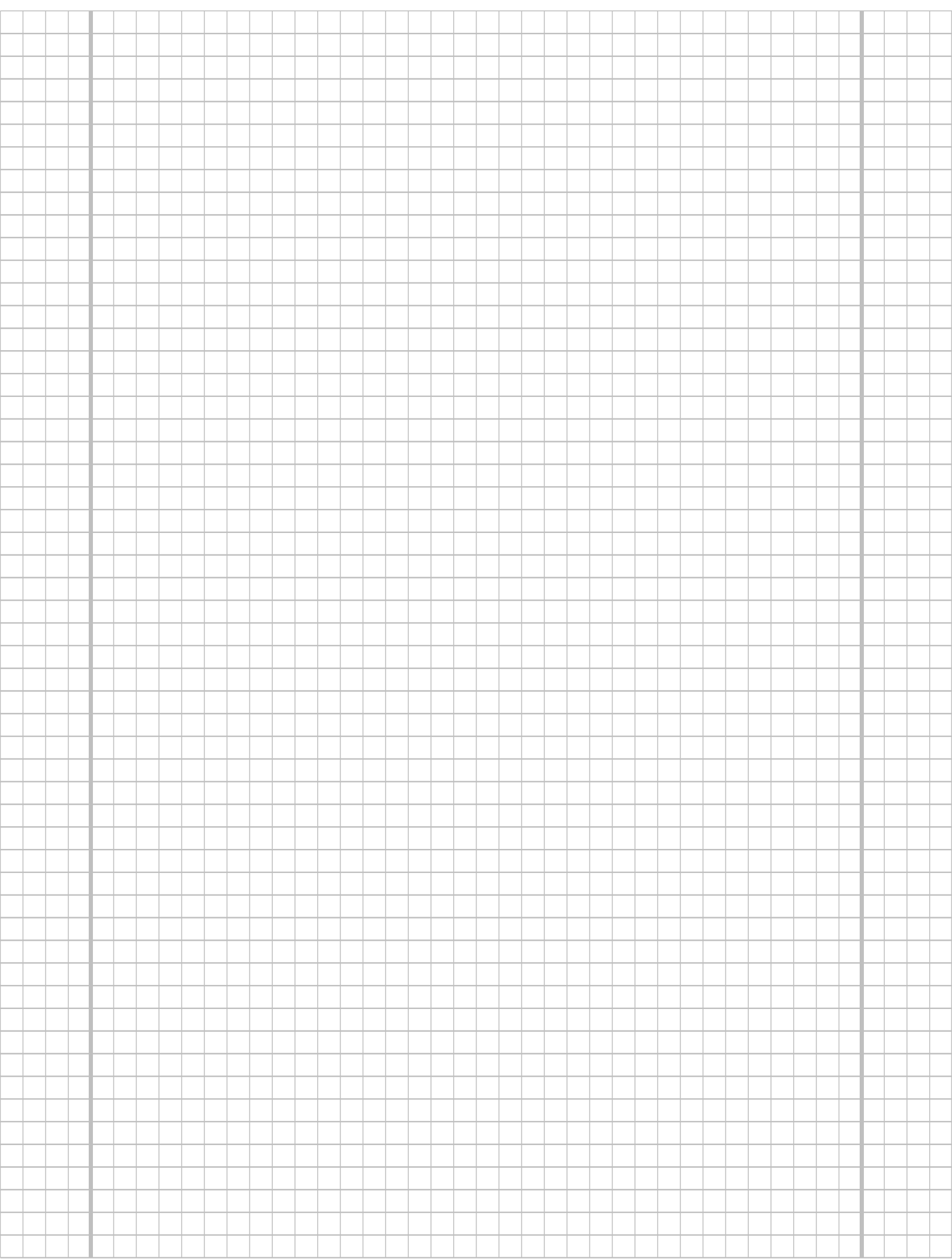
Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Verteilungsfunktion gegeben:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -4 \\ \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & \text{für } -4 < x \leq 0 \\ -\frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie eine Dichtefunktion f_X von X .
- (b) Berechnen Sie $P(\{X > -2\})$ und $P(\{-2 < X \leq 1\})$.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$.
- (d) Ist X symmetrisch um ihren Erwartungswert verteilt (ohne Begründung)?
- (e) Bestimmen Sie das obere Quartil von X .









Aufgabe 8 (2 + 3 + 9 + 1 + 3 = 18 Punkte)

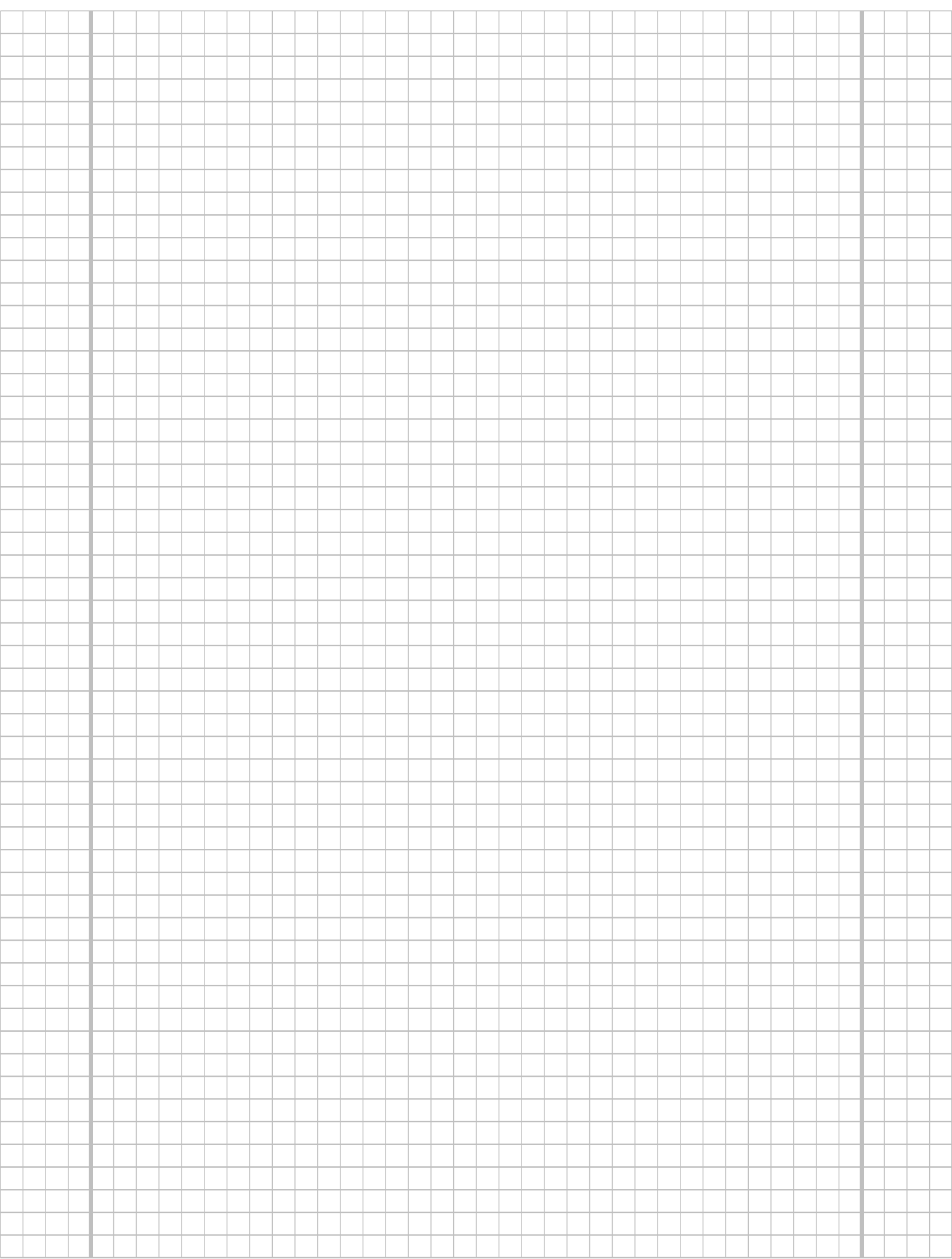
Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y) :

$X \setminus Y$	-2	0	2	$p_{i\cdot}$
2	0.16	0.04	0.05	
4	0.40	0.15	0.05	
6	0.04	0.01	0.10	
$p_{\cdot j}$				

- (a) Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.
- (b) Geben Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Y unter der Bedingung $X = x_i$ für alle $x_i \in T(X)$ über die zugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeitsfunktionen an.
- (c) Berechnen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$ sowie $\text{Korr}(X, Y)$.
- (d) Sind X und Y stochastisch unabhängig?
- (e) Berechnen Sie $E(3X - 2Y)$ sowie $\text{Var}(3X - 2Y)$.







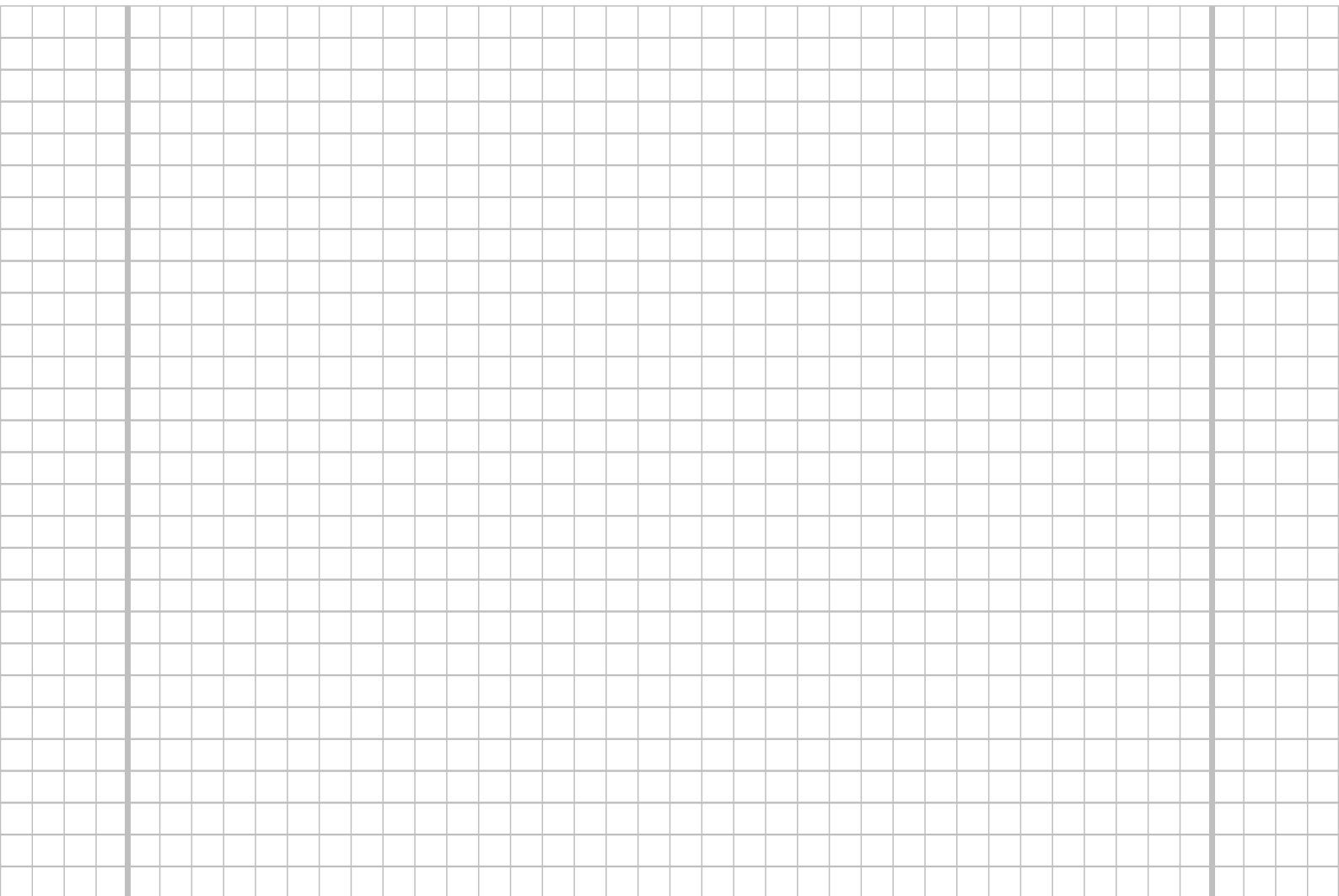


Aufgabe 9 (3 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Aufgrund langjähriger Aufzeichnungen über entsprechende Wahlbeteiligungen gehe man davon aus, dass sich die 16600 wahlberechtigten Studierenden bei einer anstehenden Senatswahl unabhängig voneinander jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 7.5% dazu entschließen, ihr Wahlrecht auch auszuüben und einen Stimmzettel auszufüllen.

- (a) Wie ist die Anzahl der ausgefüllten Stimmzettel Y exakt verteilt? Geben Sie auch den Erwartungswert $E(Y)$ sowie die Varianz $\text{Var}(Y)$ der Anzahl der ausgefüllten Stimmzettel an.
- (b) Die Wahlleitung entschließt sich aus ökologischen und ökonomischen Gründen, zunächst nur 1300 Stimmzettel für die Wahl auszudrucken und weitere Stimmzettel erst bei Bedarf nachzudrucken, falls mehr als die zunächst gedruckten Stimmzettel benötigt werden sollten. Mit welcher (mit dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise zu bestimmenden) Wahrscheinlichkeit müssen keine Stimmzettel nachgedruckt werden?
- (c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise die (kleinste) Anzahl von Stimmzetteln zu bestimmen, die mit einer Wahrscheinlichkeit von (mindestens) 99% ausreichend ist.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung von Aufgabenteil (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 28!





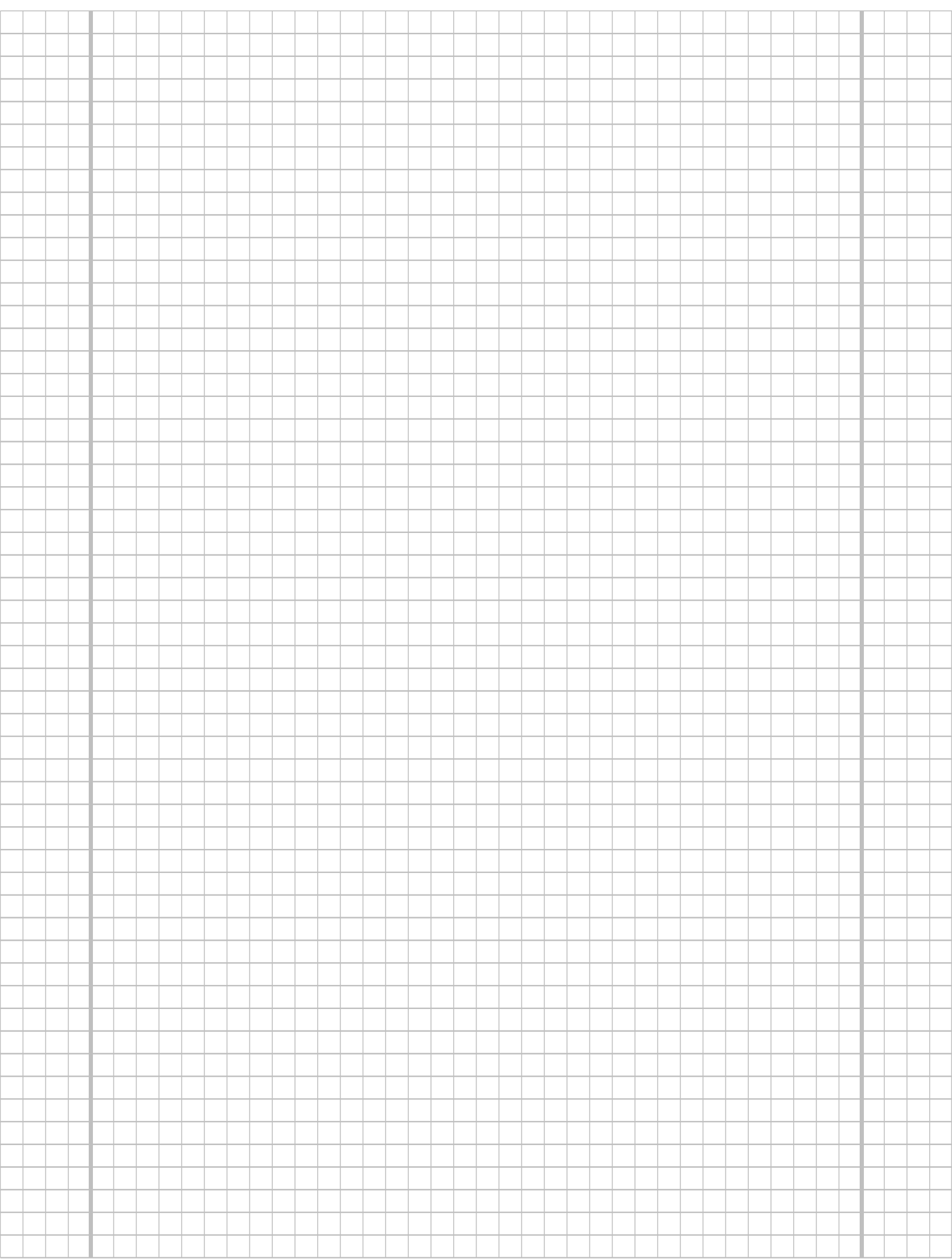




Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998