Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungsamt

Bachelor-Prüfung
Deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
Wintersemester 2012/13

Aufgabenstellung und Ergebnisse

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Kleben Sie bitte **sofort** Ihr Namensschild auf obige Markierung!
- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 14 + 16 + 6 + 10 + 21 + 15 + 10) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf diesen Blättern berücksichtigt.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben					
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	Σ
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
Σ					

Aufgabe 1 (16 Punkte)

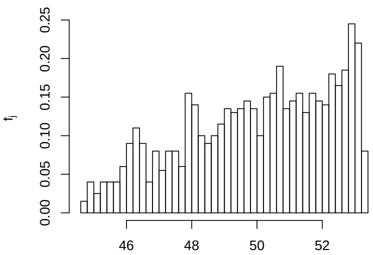
Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben +2 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

		wahr	falsch
1.	Stetige Merkmale sind immer kardinalskaliert.	■	□
2.	Das arithmetische Mittel eines kardinalskalierten Merkmals X kommt nie in der Urliste zu X vor.	□	■
3.	Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt für Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ stets $P(A \cup B) \geq P(A) + P(B)$.	□	■
4.	In einem Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsraum ist Ω stets endlich.	■	□
5.	Die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Werfen zweier fairer (6-seitiger) Würfel einen Pasch (also übereinstimmende Punktzahlen) zu würfeln, beträgt $\frac{1}{6}$.	■	□
6.	Seien X_1, X_2 und X_3 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = \mathrm{Var}(X_3) = 10$. Dann gilt $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 - X_3) = 10$.	□	■
7.	Verteilungsfunktionen diskreter Zufallsvariablen sind stets stetig.	□	■
8.	Für zwei Zufallsvariablen X und Y über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathrm{Var}(X) > 0$ und $\mathrm{Var}(Y) > 0$ gilt stets $-1 \leq \mathrm{Korr}(X, Y) \leq 1$.	■	□

Aufgabe 2 (12 Punkte)

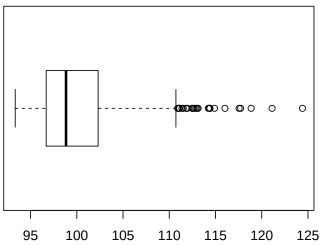
Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben +3 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

1. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



(a) leptokurtisch und rechts**steil** ☐
(b) leptokurtisch und links**steil** ☐
(c) platykurtisch und rechts**steil** ■
(d) platykurtisch und links**steil** ☐

2. Kreuzen Sie an, auf welche Merkmalseigenschaften das folgende Histogramm *am ehesten* hindeutet:



(a) leptokurtisch und rechts**steil** ☐
(b) leptokurtisch und links**steil** ■
(c) platykurtisch und rechts**steil** ☐
(d) platykurtisch und links**steil** ☐

3. Sind X_1, X_2 und X_3 drei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X_1 \sim N(30, 2^2)$, $X_2 \sim N(30, 4^2)$ und $X_3 \sim N(30, 4^2)$, dann ist die Verteilung von $X_1 + X_2 + X_3$ eine

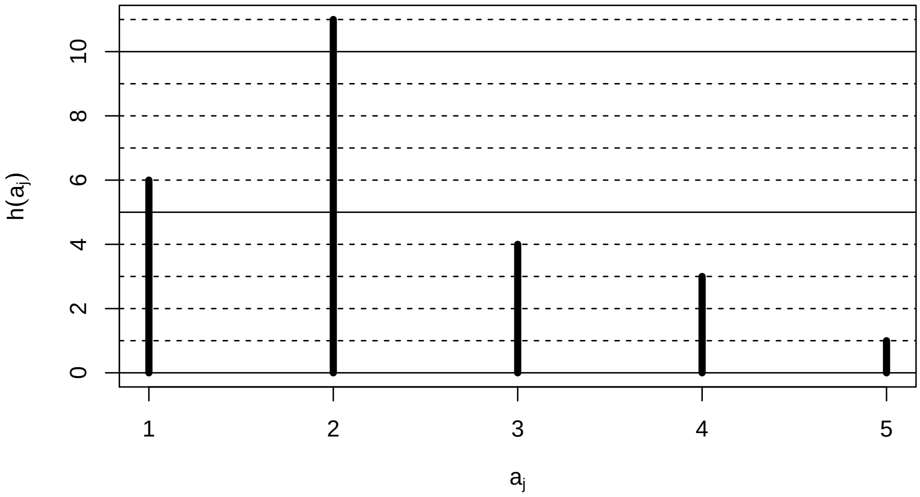
(a) $N(30, 10^2)$-Verteilung. ☐
(b) $N(90, 10^2)$-Verteilung. ☐
(c) $N(30, 6^2)$-Verteilung. ☐
(d) $N(90, 6^2)$-Verteilung. ■

4. Die 6-stellige Gewinnzahl einer Lotterie wird durch Ziehen **ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge** aus einer Urne mit den Ziffern $\{1, 2, \ldots, 9\}$ gebildet. Dann beträgt die Anzahl der möglichen Gewinnzahlen insgesamt:

(a) 9^6 ☐
(b) 6^9 ☐
(c) $(9)_6 = \frac{9!}{3!}$ ■
(d) $\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \cdot 3!}$ ☐

Aufgabe 3 (4 + 5 + 3 + 2 = 14 Punkte)

Zu einem erhobenen Merkmal X sei das folgende Stabdiagramm gegeben:



(a) Erstellen Sie eine Tabelle der absoluten und relativen Häufigkeiten.

(b) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die empirische Varianz des Merkmals X.

(c) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion des Merkmals X an.

(d) Berechnen Sie ein unteres Quartil und ein oberes Quartil des Merkmals X.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Häufigkeitstabelle (mit absoluten und relativen Häufigkeiten):

a_j	1	2	3	4	5	Σ
$h(a_j)$	6	11	4	3	1	25
$r(a_j)$	0.24	0.44	0.16	0.12	0.04	1.00

(b) $\overline{x} = 2.28$, $s^2 = 1.1616$

(c) Empirische Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0.00 & \text{für} \quad x < 1 \\ 0.24 & \text{für} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.68 & \text{für} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.84 & \text{für} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.96 & \text{für} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1.00 & \text{für} \quad x \geq 5 \end{cases}$$

(d) $x_{0.25} = 2, x_{0.75} = 3$

Aufgabe 4 (6 + 4 + 3 + 3 = 16 Punkte)

Zu einem kardinalskalierten Merkmal sei die folgende (zur einfacheren Bearbeitung der Aufgabe bereits sortierte) Urliste der Länge $n = 25$ gegeben:

22.69, 26.55, 26.68, 27.52, 30.13, 31.68, 32.54, 36.35, 39.76, 40.56, 42.65, 43.21, 43.42, 48.90, 49.15, 51.90, 51.93, 54.48, 55.13, 59.53, 60.86, 63.72, 68.32, 70.23, 73.71

(a) Führen Sie eine Klassierung der erhobenen Daten auf Grundlage der Klassen

$$K_1 = (20, 30],\ K_2 = (30, 40],\ K_3 = (40, 60],\ K_4 = (60, 80]$$

durch. Geben Sie insbesondere die jeweiligen Klassenbreiten, Klassenmitten, absoluten und relativen Klassenhäufigkeiten, Häufigkeitsdichten sowie die Werte der empirischen Verteilungsfunktion an den Klassengrenzen an.

(b) Stellen Sie die (approximative) empirische Verteilungsfunktion des Merkmals aus der Klassierung der Daten auf.

(c) Bestimmen Sie (aus der Urliste) die Anzahl von Merkmalswerten zwischen 25 und 50. Welche Näherung für diese Anzahl können Sie aus der in Teil (b) aufgestellten empirischen Verteilungsfunktion berechnen?

(d) Bestimmen Sie (unter Verwendung der bekannten Konvention zur eindeutigen Festlegung von Quantilen bei kardinalskalierten Merkmalen) *den* Median sowohl exakt aus der Urliste als auch approximativ mit Hilfe der Verteilungsfunktion für die klassierten Daten.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Klassierung:

Nr. j	Klasse $K_j = (k_{j-1}, k_j]$	Klassenbreite b_j	Klassenmitte m_j	absolute Häufigkeit h_j	relative Häufigkeit $r_j = \frac{h_j}{n}$	Häufigkeitsdichte $f_j = \frac{r_j}{b_j}$	Verteilungsfunktion $F(k_j)$
1	$(20, 30]$	10	25	4	0.16	0.0160	0.16
2	$(30, 40]$	10	35	5	0.20	0.0200	0.36
3	$(40, 60]$	20	50	11	0.44	0.0220	0.80
4	$(60, 80]$	20	70	5	0.20	0.0100	1.00

(b) (Approximative) Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 20 \\ 0.016 \cdot (x - 20) & \text{für } 20 < x \leq 30 \\ 0.16 + 0.02 \cdot (x - 30) & \text{für } 30 < x \leq 40 \\ 0.36 + 0.022 \cdot (x - 40) & \text{für } 40 < x \leq 60 \\ 0.8 + 0.01 \cdot (x - 60) & \text{für } 60 < x \leq 80 \\ 1 & \text{für } x > 80 \end{cases}$$

(c) Anzahl (aus Urliste): 14
Mit emp. Verteilungsfunktion genäherte Anzahl: 12.5

(d) Median:

- exakt (aus Urliste): 43.42
- approximativ: $46.\overline{36}$

Aufgabe 5 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Eine Lostrommel enthält 30 (gleichartige) Kugeln, die von 1 bis 30 durchnummeriert sind. Es wird einmalig rein zufällig eine der 30 Kugeln gezogen.

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments an.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit einer geraden Zahl zu ziehen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel mit einer Zahl kleiner oder gleich 12 zu ziehen?

(c) Sind die Ereignisse „Kugel mit einer geraden Zahl“ und „Kugel mit einer Zahl kleiner oder gleich 12“ aus Teil (b) stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\Omega := \{1, \dots, 30\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, P die Laplace-Wahrscheinlichkeit $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}; A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|}$.

(b) $P($„gerade Zahl“$) = 0.5$, $P($„Zahl kleiner oder gleich 12“$) = 0.4$.

(c) Ja.

Aufgabe 6 (6 + 2 + 2 = 10 Punkte)

Ein Sanitärinstallationsbetrieb verwendet für die Ausführung von Warmwasser-Installationen vier unterschiedlichen Systeme A, B, C und D von verschiedenen Herstellen. Dabei werden Warmwasser-Installationen mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% mit System A, 20% mit System B, 20% mit System C und 10% mit System D ausgeführt. Bei den anschließenden Druckprüfungen gibt es erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% bei System A, 3% bei System B, 4% bei System C und 6% bei System D Undichtigkeiten.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Warmwasser-Installation bei der Druckprüfung undicht ist?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bei der Druckprüfung undichte Installation mit System B ausgeführt wurde?

(c) Sind die Ereignisse "Installation ist undicht" bzw. "System B wurde verwendet" stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) 0.03

(b) 0.2

(c) Ja.

Aufgabe 7 (3 + 2 + 12 + 4 = 21 Punkte)

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X sei durch die folgende Verteilungsfunktion gegeben:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -1 \\ -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie eine Dichtefunktion f_X von X.

(b) Berechnen Sie $P\left(\left\{X < -\frac{1}{2}\right\}\right)$ und $P\left(\left\{X > \frac{1}{2}\right\}\right)$.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

(d) Bestimmen Sie das obere Quartil von X.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Dichtefunktion von X:

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{3}{8} & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $P\left(\left\{X < -\frac{1}{2}\right\}\right) = \frac{9}{32}, P\left(\left\{X > \frac{1}{2}\right\}\right) = \frac{9}{32}$

(c) $\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{Var}(X) = \frac{3}{8}$

(d) $x_{0.75} = 0.5616$

Aufgabe 8 (2 + 9 + 1 + 3 = 15 Punkte)

Gegeben sei die folgende Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem zweidimensionalen diskreten Zufallsvektor (X, Y):

$X \setminus Y$	0	2	4	$p_{i\cdot}$
2	0.05	0.15	0.05	
4	0.2	0.35	0.2	
$p_{\cdot j}$				

(a) Ergänzen Sie die obige Tabelle (in den vorgesehenen Feldern) um ihre Randverteilungen.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ sowie $\mathrm{Korr}(X, Y)$.

(c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

(d) Berechnen Sie $\mathrm{E}(2X - 3Y)$ sowie $\mathrm{Var}(2X - 3Y)$.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Ergänzte Tabelle:

$X \setminus Y$	0	2	4	$p_{i\cdot}$
2	0.05	0.15	0.05	0.25
4	0.2	0.35	0.2	0.75
$p_{\cdot j}$	0.25	0.5	0.25	1

(b) Es gilt: $\mathrm{E}(X) = 3.5$, $\mathrm{E}(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 0.75$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, $\mathrm{Korr}(X, Y) = 0$

(c) X und Y sind **nicht** stochastisch unabhängig.

(d) $\mathrm{E}(2 \cdot X - 3 \cdot Y) = 1$, $\mathrm{Var}(2 \cdot X - 3 \cdot Y) = 21$

Aufgabe 9 (2 + 4 + 4 = 10 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{256}$ seien unabhängig identisch $B(1, 0.75)$-verteilt. Die Summe der Zufallsvariablen X_i sei mit

$$Y := \sum_{i=1}^{256} X_i = X_1 + \ldots + X_{256}$$

bezeichnet.

(a) Geben Sie die (exakte) Verteilung von Y sowie deren Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$ und Varianz $\mathrm{Var}(Y)$ an.

(b) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise zu bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit Y Werte zwischen 180 und 200 annimmt.

(c) Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz, um näherungsweise ein 0.975-Quantil von Y zu bestimmen.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bearbeitung von Aufgabenteil (b) und (c) die Tabelle zur Standardnormalverteilung auf Seite 11!

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $Y \sim B(256, 0.75)$, $\mathrm{E}(Y) = 192$, $\mathrm{Var}(Y) = 48$.

(b) $P\{180 \leq Y \leq 200\} \approx 0.8331$

(c) $y_{0.975} \approx 205.579$

Tabelle zur Standardnormalverteilung

$$F_{N(0,1)}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998