Aufgabenstellung und Ergebnisse zur

Bachelor-Prüfung
Schliessende Statistik
Sommersemester 2017

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 10 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 5 + 8 + 14 + 16 + 10 + 13 + 7 + 19) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und t-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–12 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und t-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben								
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	Σ
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
Σ								

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

	Aussage	wahr	falsch
1.	Sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu einer normalverteilten Zufallsvariablen Y. Dann sind die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ stets unkorreliert.	■	□
2.	Ist eine Schätzfunktion $\widehat{\theta}$ effizient in einer Klasse erwartungstreuer Schätzfunktionen für den Parameter $\theta \in \Theta$, so ist die Varianz jeder anderen Schätzfunktion aus dieser Klasse mindestens so groß wie die Varianz von $\widehat{\theta}$; dies gilt unabhängig davon, welches $\theta \in \Theta$ der wahre Parameter ist.	■	□
3.	Zur Schätzung des Parameters $\theta \in \mathbb{R}$ seien für $n \in \mathbb{N}$ Schätzfunktionen T_n gegeben mit den Eigenschaften $\mathrm{E}(T_n) = \frac{\theta+1}{n}$ und $\mathrm{Var}(T_n) = \frac{3}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge T_n von Schätzfunktionen für θ konsistent im quadratischen Mittel.	□	■
4.	Die Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ wird beim Gauß-Test auf den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz zum Signifikanzniveau α genau dann angenommen, wenn μ_0 im entsprechenden (symmetrischen) Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ für μ enthalten ist.	■	□
5.	Bei einem statistischen Hypothesentest ist die minimale Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art stets größer als die maximale Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art.	□	■
6.	Liegt die Teststatistik T im kritischen Bereich eines Signifikanztests zum Signifikanzniveau α, so gilt für den p-Wert p zur Teststatistik T die Beziehung $p \geq \alpha$.	□	■
7.	Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll anhand einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 200$ überprüft werden, ob die Grundgesamtheit normalverteilt ist. Nach Wahl einer geeigneten Klassierung aus 6 Klassen werden dazu zunächst die beiden unbekannten Parameter der Normalverteilung durch eine ML-Schätzung aus den klassierten Daten ermittelt. Damit ist zur Konstruktion des Ablehnungsbereiches die χ^2-Verteilung mit 4 Freiheitsgraden zu verwenden.	□	■
8.	Bei der Anwendung der Kleinst-Quadrate-Methode wird die Summe der quadrierten vertikalen Abstände der Beobachtungspunkte zur Regressionsgeraden minimiert.	■	□

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y mit $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für die Verteilung von $\sum_{i=1}^{n} X_i$:

   (a) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ☐

   (b) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ☐

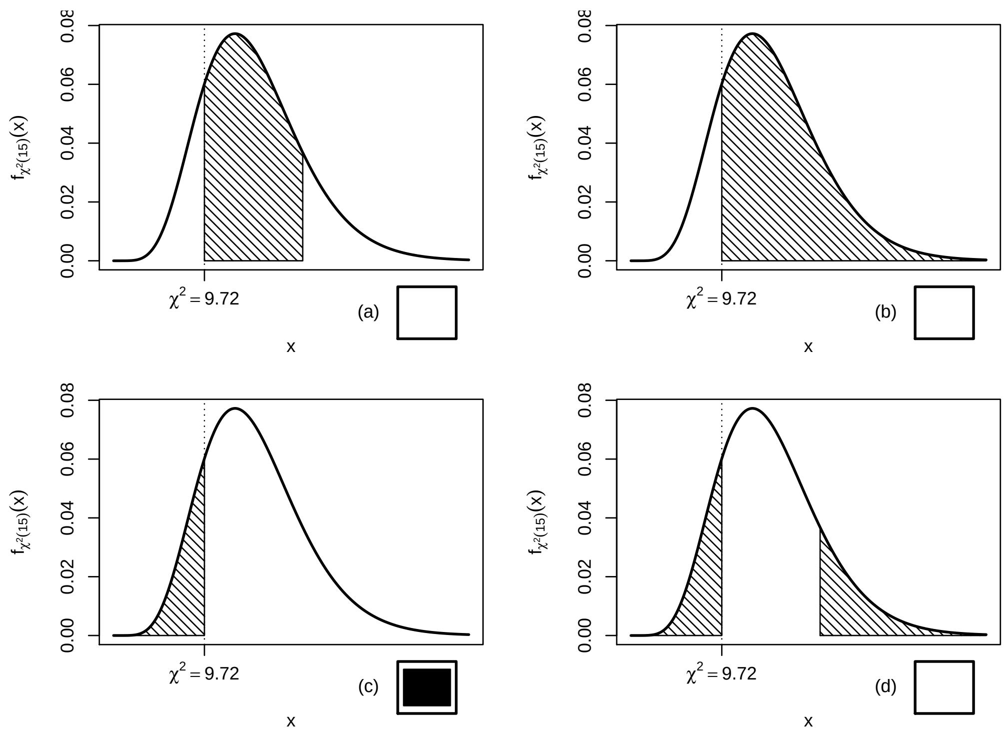
   (c) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, \sigma^2\right)$ ☐

   (d) $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$ ■

2. Sei $X_1, \dots, X_{16}$ eine einfache Stichprobe zu einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen Y mit unbekannten Parametern μ und σ^2. Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu dieser einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 16$ soll

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 = 16 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 = 16$$

   mit einem Chi-Quadrat-Test getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man $\chi^2 = 9.72$. Markieren Sie die Abbildung, welche den p-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter H_0 (für $\sigma^2 = \sigma_0^2$) darstellt.



3. Als p-Wert zur realisierten Teststatistik eines zweiseitigen Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz (mit $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$) erhält man $p = 0.04759$. Dann gilt für das Ergebnis der einseitigen Tests (mit $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$ bzw. $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ (auf Grundlage derselben Stichprobenrealisation):

   (a) Auf Grundlage der vorhandenen Informationen ist noch unklar, ob bei keinem, genau einem oder beiden einseitigen Tests H_0 abgelehnt wird. ☐

   (b) Bei beiden einseitigen Tests wird H_0 abgelehnt. ☐

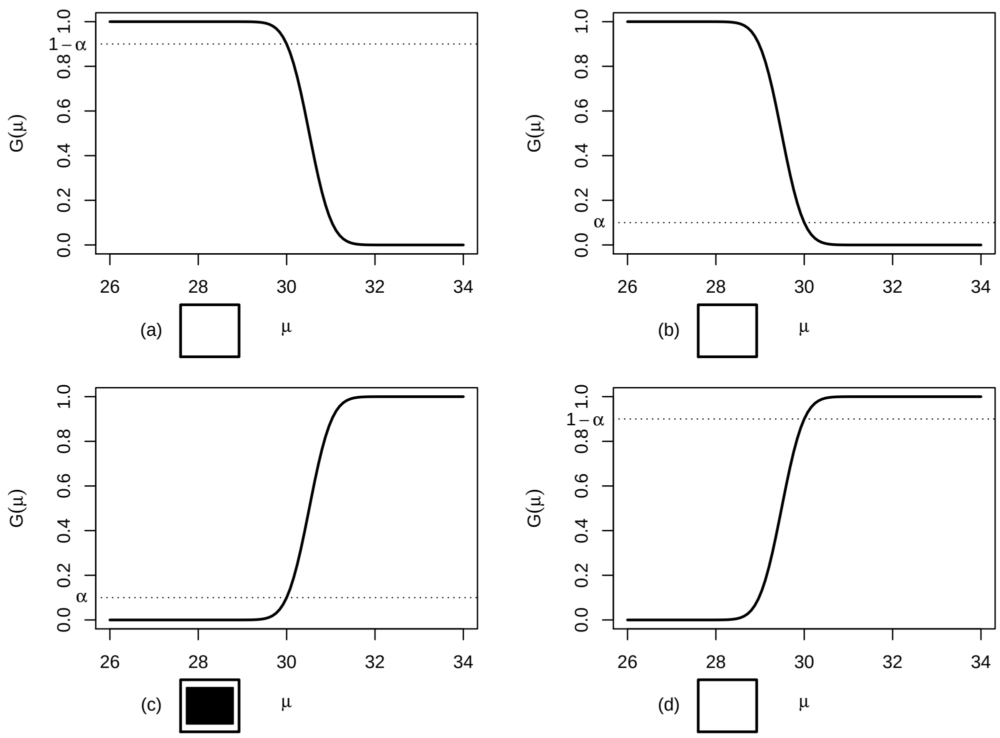
   (c) Bei keinem der beiden einseitigen Tests wird H_0 abgelehnt. ☐

   (d) Bei genau einem der beiden einseitigen Tests wird H_0 abgelehnt. Bei welchem dies der Fall ist, hängt vom Vorzeichen der Teststatistik ab. ■

4. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{25}$ vom Umfang $n = 25$ zu einer $N(\mu, 2^2)$-verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq 30 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu > 30$$

bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ betrachtet.
Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



Aufgabe 3 (5 Punkte)

Für $0 < p < 1$ sei $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$, es gilt also insbesondere $\mathrm{E}(Y) = \frac{1-p}{p}$ sowie $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2}$. $X_1, \ldots, X_n$ sei für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y. Untersuchen Sie, ob die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i^2 + X_i\right)$$

erwartungstreu für **die Varianz von** Y sind.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

Die Schätzfunktionen $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ sind erwartungstreu für die Varianz von Y.

Aufgabe 4 (6 + 2 = 8 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $b > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|b) = \begin{cases} \dfrac{b^3}{2} \cdot (y-1)^2 \cdot e^{-b\cdot(y-1)} & \text{für } y > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter b soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{b}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Man kann zeigen, dass $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{3}{b} + 1$ gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer $\widehat{b}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{b}_{ML} = \dfrac{3 \cdot n}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)} = \dfrac{3}{\overline{x} - 1}$

(b) $\widehat{b}_{MM} = \dfrac{3}{\overline{x} - 1}$

Aufgabe 5 (3 + 7 + 4 = 14 Punkte)

Bei der Abfüllung von Estrichbeton weiß der Hersteller aus Erfahrung, dass die verwendete Maschine eine Standardabweichung von $0.2[kg]$ für die abgefüllte Menge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllanlage im Mittel mehr als die auf dem Produkt ausgezeichneten $40[kg]$ in die Säcke einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 16 Säcke entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \dots, x_{16}$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 16 zur annahmegemäß $N(\mu, 0.2^2[kg^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 40.091[kg] \ .$$

(a) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ an.

(b) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Ziehung einer Stichprobe und der anschließenden Durchführung des Tests aus Teil (b) eine Testentscheidung zu Gunsten der Nullhypothese zu erhalten, falls die tatsächliche mittlere Abfüllmenge $40.1[kg]$ beträgt?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Realisiertes symm. Konfidenzintervall zum Konf.-niveau $1-\alpha = 0.95$: $[39.993, 40.189]$

(b) $N = 1.82 \in (1.645, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test bestätigt also den Verdacht der Herstellerfirma, dass die von der Maschine abgefüllte Menge im Mittel zu hoch ist.

(c) $\beta(40.1) = 0.3594$

Aufgabe 6 (9 + 7 = 16 Punkte)

Ein Hersteller von Metallwaren produziert unter anderem Flachverbinder mit einer Soll-Länge von 15 [cm]. Es soll angenommen werden, dass die Länge der hergestellten Flachverbinder gemäß einer Normalverteilung mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz schwankt. Zur Überprüfung der Qualität der produzierten Flachverbinder werden 10 Flachverbinder aus dem laufenden Produktionsprozess entnommen. Die gemessenen Längen

$$14.85, 14.94, 14.93, 14.87, 15.03, 14.93, 15.05, 15.12, 14.98, 14.99$$

seien als Realisation einer einfachen Stichprobe zur normalverteilten Grundgesamtheit aufzufassen. Aus dieser Realisation wurde bereits $s^2 = 0.006832$ berechnet.

(a) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die tatsächliche mittlere Länge der produzierten Flachverbinder im Vergleich zur angegebenen Soll-Länge von 15 [cm] zu klein ist. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die Varianz der Länge der produzierten Flachverbinder im Vergleich zur vom Hersteller angegebenen Toleranz $\sigma_0^2 = 0.0025$ zu groß ist. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (b) den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen

$n\backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
6	0.872	1.237	1.635	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $t = -1.186 \notin (-\infty, -1.833) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Der Test kann also die Vermutung, dass die mittlere Länge der produzierten Flachverbinder im Vergleich zur angegebenen Soll-Länge von 15 [cm] zu klein ist, nicht bestätigen.

(b) $\chi^2 = 24.595 \in (16.919, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test kann also die Vermutung, dass die Varianz der Länge der produzierten Flachverbinder im Vergleich zur vom Hersteller angegebenen Toleranz $\sigma_0^2 = 0.0025$ zu groß ist, bestätigen.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Zwei unterschiedlichen Gruppen mit 56 (Gruppe A) bzw. 66 (Gruppe B) Heuschnupfenpatienten wird jeweils ein spezielles Antihistaminikum verabreicht. Nach einer festgelegten Zeit werden dann alle Heuschnupfenpatienten gefragt, ob durch das verabreichte Medikament eine Minderung der Beschwerden eingetreten ist. In der Gruppe der Heuschnupfenpatienten, denen Antihistaminikum A verabreicht wurde, beantworten 34 Personen diese Frage positiv, in der zu Antihistaminikum B gehörigen Gruppe 49 Personen. Überprüfen Sie unter der Annahme, dass es sich bei dem Stichprobenergebnis um die Realisation zweier unabhängiger einfacher Stichproben handelt, zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob sich die Wirksamkeit der beiden Antihistaminika unterscheidet (bezogen auf die Erfolgswahrscheinlichkeit für eine Minderung der Beschwerden). Formulieren Sie das Ergebnis auch in Form eines Antwortsatzes.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$t = -1.6005 \notin (-\infty, -1.98) \cup (1.98, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!
Der Test findet also keine Anzeichen dafür, dass sich die Wirksamkeit der beiden Antihistaminika unterscheidet.

Aufgabe 8 (13 Punkte)

Um die Leistungsfähigkeit von 4 Schulklassen einer Klassenstufe zu vergleichen, soll anhand der Ergebnisse einer Vergleichsarbeit untersucht werden, ob die Verteilung der von den Schülern erreichten Punktzahlen abhängig davon ist, welcher der 4 Klassen sie angehören. Zu den verschiedenen Schulklassen wurden die folgenden (fiktiven) Daten zu den erreichten Punktzahlen erhoben:

j (Klasse)	n_j	$\overline{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}^2$
1	28	18.877	10407.61
2	23	18.522	8370.05
3	22	15.844	5969.95
4	20	15.323	4971.13

Für die Durchführung der einfachen Varianzanalyse wurde hieraus bereits die Größe $SW = 1632.107$ berechnet.
Überprüfen Sie mit einer einfachen Varianzanalyse (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$) unter der Annahme, dass die erreichten Punktzahlen Realisierungen von unabhängig $N(\mu_j, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $X_{j,i}(1 \le j \le 4, 1 \le i \le n_j)$ sind, ob die Zugehörigkeit zu den unterschiedlichen Schulklassen einen Einfluss auf die (mittlere) erreichte Punktzahl hat. Fassen Sie das Ergebnis der Varianzanalyse auch in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95*-Quantilen von* $F(m, n)$*-Verteilungen:*

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	85	86	87	88	89
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	252.817	252.834	252.851	252.868	252.884
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.484	19.484	19.484	19.484	19.484
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.559	8.558	8.558	8.558	8.557
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	5.670	5.670	5.669	5.669	5.668
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.412	4.412	4.411	4.410	4.410
85	3.953	3.104	2.712	2.479	2.322	1.432	1.430	1.429	1.428	1.427
86	3.952	3.103	2.711	2.478	2.321	1.430	1.429	1.427	1.426	1.425
87	3.951	3.101	2.709	2.476	2.319	1.428	1.427	1.426	1.424	1.423
88	3.949	3.100	2.708	2.475	2.318	1.426	1.425	1.424	1.423	1.422
89	3.948	3.099	2.707	2.474	2.317	1.425	1.423	1.422	1.421	1.420

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$F = 4.159 \in (2.707, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Die einfache Varianzanalyse kommt also zum Ergebnis, dass die Zugehörigkeit zu den unterschiedlichen Schulklassen einen signifikanten ($\alpha = 0.05$) Einfluss auf die (mittlere) erreichte Punktzahl hat.

Aufgabe 9 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 Punkte)

Zur Erklärung des Blutdrucks y_i durch das Verhältnis von tatsächlichem Gewicht zum Idealgewicht x_i unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aus den Daten einer US-amerikanischen Studie mit ausschließlich weiblichen Probanden wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-21.202 -13.419  -2.503   5.834  70.957

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    72.74      19.62   3.708 0.000845 ***
x              37.17      13.59   2.734 0.010383 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 18.54 on 30 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1995,       Adjusted R-squared:  0.1728
F-statistic: 7.477 on 1 and 30 DF,  p-value: 0.01038
```

(a) Wie viele weibliche Testpersonen gingen in die Schätzung ein?

(b) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(c) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(d) Welcher Anteil der Gesamtvarianz des Blutdrucks wird durch das lineare Modell erklärt?

(e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob β_1 signifikant von Null verschieden ist.

(f) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob β_2 signifikant positiv ist.

(g) Welchen Blutdruck prognostiziert das Modell für eine weibliche Person mit einem Verhältnis zwischen tatsächlichem Gewicht und Idealgewicht von 1.1?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $n = 32$

(b) $\widehat{\beta}_1 = 72.74$, $\widehat{\beta}_2 = 37.17$

(c) $\widehat{\sigma^2} = 343.7316$

(d) 0.1995

(e) β_1 ist signifikant von Null verschieden.

(f) β_2 ist signifikant positiv.

(g) 113.627

Aufgabe 10 (6 + 2 + 3 + 3 + 5 = 19 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 30$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{30} y_i = 119.349; \quad \sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 850.131; \quad \sum_{i=1}^{30} x_i = 180.079;$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 1165.397; \quad \sum_{i=1}^{30} x_i \cdot y_i = 572.096$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(d) Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für β_2 an.

(e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für y_0 gegeben $x_0 = 4$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 14.2337$, $\widehat{\beta}_2 = -1.7085$

(b) $\widehat{\sigma}^2 = 4.5992$

(c) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 2.1153$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.054453$

(d) $[-2.186, -1.231]$

(e) $[2.833, 11.967]$