Aufgabenstellung und Ergebnisse zur

Bachelor-Prüfung
Schliessende Statistik
Wintersemester 2016/17

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 8 + 8 + 14 + 28 + 11 + 5 + 18) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch mit Grafikfähigkeit), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und t-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–11 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und t-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben						
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	Σ
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
Σ						

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben 2 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).

wahr falsch

1. Für die Erwartungswerte der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und Y gelte $\mathrm{E}(X_1) = \ldots = \mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(Y)$ sowie für die Varianzen $\mathrm{Var}(X_1) = \ldots = \mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(Y)$. Dann ist $X_1, \ldots, X_n$ stets eine einfache Stichprobe zu Y. ☐ ■

2. Ist eine Familie von Schätzfunktionen $T_n, n \in \mathbb{N}$, konsistent im quadratischen Mittel für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt stets ■ ☐
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(T_n) = \lambda.$$

3. Ist $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Stichprobe zu einer mit bekannter Varianz und unbekanntem Erwatzungswert verteilten Zufallsvariablen Y, so erhält man bei einer Stichprobenziehung mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ eine Stichprobenrealisation, die zu einem realisierten Konfidenzintervall (zum Konfidenzniveau $1-\alpha$) für den Erwartungswert führt, welches den unbekannten Erwartungswert von Y enthält ($\alpha \in (0, 1)$). ■ ☐

4. Je kleiner der p-Wert zu einer realisierten Teststatistik ist, umso mehr spricht die realisierte Teststatistik für die Verletzung der Nullhypothese. ■ ☐

5. Beim Test zum Vergleich von zwei Anteilswerten (als Spezialfall des 2-Stichproben-t-Tests) muss die Voraussetzung $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ nicht überprüft werden, da sie unter H_0 automatisch erfüllt ist. ■ ☐

6. Wenn bei einem statistischen Test zum Signifikanzniveau α die Testentscheidung für H_0 ausfällt, dann gilt H_0 mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$. ☐ ■

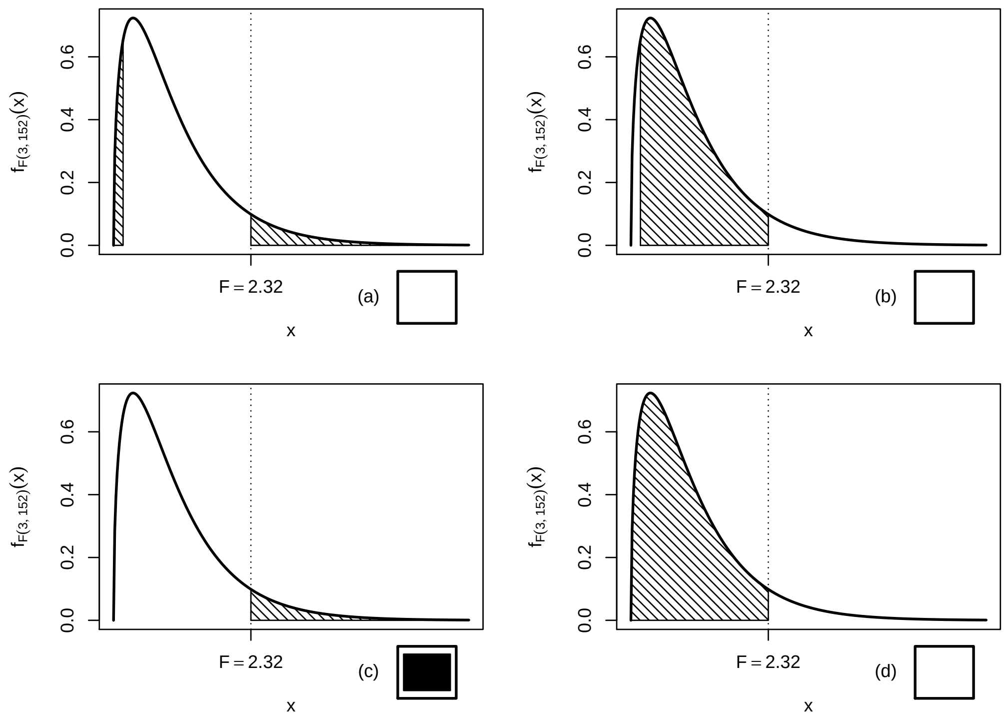
7. Sind die Voraussetzungen zur Anwendung der einfachen Varianzanalyse erfüllt und liegen als Stichprobenrealisation jeweils 25 Beobachtungen zu 6 Faktorstufen vor, so ist die Teststatistik bei Gültigkeit der Nullhypothese $F(5, 144)$-verteilt. ■ ☐

8. Im einfachen linearen Regressionsmodell ■ ☐
$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i, \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),$$
sind Prognoseintervalle für y_0 gegeben x_0 umso breiter, je weiter x_0 von $\overline{x}$ entfernt ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben 3 Punkte, falsche Antworten und nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).

1. Bei der Durchführung einer einfachen Varianzanalyse mit $k = 4$ Faktorstufen und einem Gesamtstichprobenumfang von $n = 156$ erhält man die realisierte Teststatistik $F = 2.32$. Markieren Sie die Abbildung, welche den p-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter H_0 darstellt.



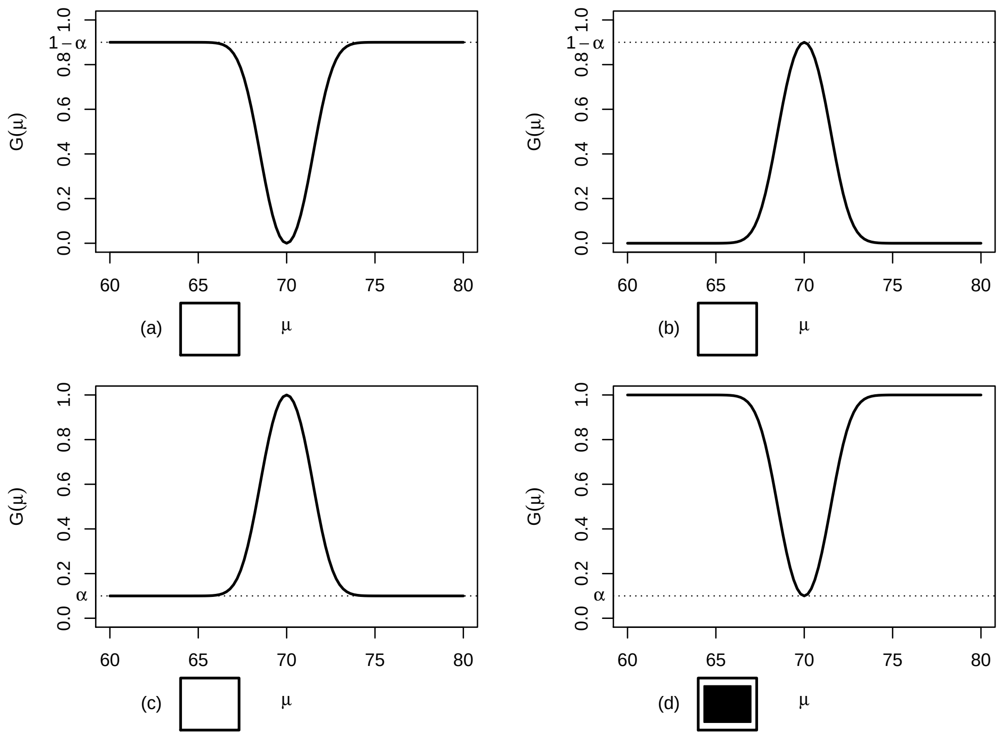
2. Es sei $X_1, \ldots, X_{36}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang 36 zu Y mit $Y \sim N(102, 3^2)$. Dann gilt für die Teststatistik $N = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ des Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen mit bekannter Varianz zur Nullhypothese $H_0 : \mu = 100$:

(a) $N \sim N(0,1)$ ☐
(b) $N \sim N(4,1)$ ☒
(c) $N \sim N\left(0,3^2\right)$ ☐
(d) $N \sim N\left(4,3^2\right)$ ☐

3. Auf der Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_{30}$ vom Umfang $n = 30$ zu einer $N(\mu, 5^2)$-verteilten Zufallsvariablen wird ein Gauß-Test zur Überprüfung der Hypothesen

$$H_0 : \mu = 70 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu \neq 70$$

bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1$ betrachtet.
Markieren Sie die Abbildung, welche die Gütefunktion des oben genannten Tests korrekt darstellt.



4. Als p-Wert zur realisierten Teststatistik eines rechtsseitigen Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz (mit $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$) erhält man $p = 0.0324$. Dann gilt für die p-Werte des linksseitigen Tests (mit $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$) bzw. des zweiseitigen Tests (mit $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$):

(a) Der p-Wert des linksseitigen Tests beträgt 0.0648, der p-Wert des zweiseitigen Tests 0.0162. ☐

(b) Der p-Wert des linksseitigen Tests beträgt 0.0162, der p-Wert des zweiseitigen Tests 0.0648. ☐

(c) Der p-Wert des linksseitigen Tests beträgt 0.9676, der p-Wert des zweiseitigen Tests 0.0162. ☐

(d) Der p-Wert des linksseitigen Tests beträgt 0.9676, der p-Wert des zweiseitigen Tests 0.0648. ■

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Für $\sigma > 0$ sei die Zufallsvariable Y Rayleigh-verteilt mit Parameter σ. Es gilt dann $\mathrm{E}(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$ sowie $\mathrm{E}(Y^4) = 8\sigma^4$. $X_1, \ldots, X_n$ sei für $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y. Untersuchen Sie, ob die Schätzfunktionen

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

konsistent im quadratischen Mittel für σ^2 sind.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

Die Schätzfunktionen $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ sind konsistent im quadratischen Mittel für σ^2.

<u>Aufgabe 4</u> (6 + 2 = 8 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $\lambda > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y|\lambda) = \begin{cases} \lambda^2 \cdot (y+1) \cdot e^{-\lambda \cdot (y+1)} & \text{für } y > -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter λ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{\lambda}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Man kann zeigen, dass $\mathrm{E}(Y) = \frac{2}{\lambda} - 1$ gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer $\widehat{\lambda}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\lambda}_{ML} = \dfrac{2 \cdot n}{\sum_{i=1}^{n}(x_i + 1)} = \dfrac{2}{\overline{x} + 1}$

(b) $\widehat{\lambda}_{MM} = \dfrac{2}{\overline{x} + 1}$

Aufgabe 5 (3 + 7 + 4 = 14 Punkte)

Bei der Abfüllung von Fertigspachtel weiß der Hersteller aus Erfahrung, dass die verwendete Maschine eine Standardabweichung von $0.2[kg]$ für die abgefüllte Menge hat. Nach einer Inventur hat der Hersteller den Verdacht, dass die Abfüllanlage im Mittel eine andere Menge als die auf dem Produkt ausgezeichneten $10[kg]$ in die Eimer einfüllt. Dies soll mit einem statistischen Test überprüft werden. Hierzu werden der Produktion 9 Eimer entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \ldots, x_9$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 9 zur annahmegemäß $N(\mu, 0.2^2[kg^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = 9.877[kg] .$$

(a) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ an.

(b) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$ **(!)**, ob der Verdacht der Herstellerfirma bestätigt werden kann. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Ziehung einer Stichprobe und der anschließenden Durchführung des Tests aus Teil (b) eine Testentscheidung zu Gunsten der Nullhypothese zu erhalten, falls die tatsächliche mittlere Abfüllmenge $10.12[kg]$ beträgt?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) Realisiertes symm. Konfidenzintervall zum Konf.-niveau $1-\alpha = 0.95$: $[9.746, 10.008]$

(b) $N = -1.845 \in (-\infty, -1.645) \cup (1.645, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test bestätigt also den Verdacht der Herstellerfirma, dass die von der Maschine abgefüllte Menge im Mittel vom Sollwert abweicht.

(c) $\beta(10.12) = 0.4401$

Aufgabe 6 (11 + 9 + 8 = 28 Punkte)

Um zu überprüfen, ob sich die Leistungsfähigkeit von NiMH-Akkus zweier verschiedener Marken unterscheidet, lässt ein Testinstitut die Ausdauer jeweils eines Akkusatzes in 10 unterschiedlichen Taschenlampenmodellen untersuchen. Es wurden dabei die folgenden Leuchtdauern (in Minuten) bis zur automatischen Abschaltung der Lampen festgestellt:

Taschenlampe i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marke A x_i^A	232	270	249	256	194	244	235	236	257	254
Marke B x_i^B	216	241	254	223	226	235	210	242	227	225

(a) Überprüfen Sie unter der Annahme, dass die gemessenen Leuchtdauern (in Minuten) aus einer einfachen Stichprobe zur zweidimensional normalverteilten Grundgesamtheit (Y^A, Y^B) der Leuchtdauern mit Akkumarke A (Y^A) bzw. Akkumarke B (Y^B) stammen, zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ die Hypothese, dass die Verwendung von Akkumarke A im Vergleich zu Akkumarke B durchschnittlich eine längere Leuchtdauer ermöglicht. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Nehmen Sie nun an, dass durch eine grobe Unachtsamkeit bei der Datenerhebung die Zuordnung der einzelnen Leuchtdauern zu den jeweiligen Taschenlampenmodellen verloren gegangen ist. Um die Situation zu retten, nehme man weiter an, dass mit $X_1^A, \dots, X_{10}^A$ und $X_1^B, \dots, X_{10}^B$ nun zwei unabhängige einfache Stichproben zu den beiden (normalverteilten) Zufallsvariablen Y^A und Y^B vorliegen. Testen Sie unter der Annahme der Varianzgleichheit von Y^A und Y^B zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ auf dieser Basis die Hypothese, dass die Verwendung von Akkumarke A im Vergleich zu Akkumarke B eine längere Leuchtdauer ermöglicht. Verwenden Sie hierzu die Stichprobenmittelwerte $\overline{x^A} = 242.7$ bzw. $\overline{x^B} = 229.9$ sowie die Stichprobenvarianzen $s^2_{Y^A} = 431.79$ bzw. $s^2_{Y^B} = 173.43$. Fassen Sie das Ergebnis des Tests auch in einem Antwortsatz zusammen.

(c) Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob die in Teil (b) getroffene Annahme der Varianzgleichheit auf Grundlage der vorhandenen Stichprobeninformation verworfen werden muss. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (c) den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95*-Quantilen von* $F(m,n)$*-Verteilungen sowie ggf. die Rechenregel* $F_{m,n;p} = \frac{1}{F_{n,m;1-p}}$.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $t = 1.9012 \in (1.833, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test kann also die Vermutung, dass die Verwendung von Akkumarke A im Vergleich zu Akkumarke B eine längere Leuchtdauer ermöglicht, bestätigen.

(b) $t = 1.645 \notin (1.734, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Der Test kann also die Vermutung, dass die Verwendung von Akkumarke A im Vergleich zu Akkumarke B eine längere Leuchtdauer ermöglicht, nicht bestätigen.

(c) $F = 2.49 \notin [0, 0.315) \cup (3.179, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Der Test findet also keine Anzeichen für eine Verletzung der in Teil (b) angenommenen Varianzgleichheit.

Aufgabe 7 (11 Punkte)

Mit einem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ überprüft werden, ob man bei einem beobachteten Stichprobenergebnis von der Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 100$ zu einer Geom(0.45)-verteilten Zufallsvariablen ausgehen kann. Die Stichprobeninformation liege in Form der folgenden Häufigkeitsverteilung vor:

a_i	0	1	2	≥ 3
n_i	30	26	16	28

Führen Sie den beschriebenen Test durch. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweise:

- *Die geometrische Verteilung mit Parameter* $p = 0.45$ *hat den Träger* $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ *und die Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$p_{\text{Geom}(0.45)} : \mathbb{N}_0 \to [0,1]; p_{\text{Geom}(0.45)}(i) = (1 - 0.45)^i \cdot 0.45 \ .$$

- *Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit* p*-Quantilen von* $\chi^2(n)$*-Verteilungen:*

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$\chi^2 = 13.2382 \in (7.815, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Die Nullhypothese einer Geom(0.45)-Verteilung muss also abgelehnt werden.

Aufgabe 8 $(1+1+1+1+1=5$ Punkte$)$

Zur Erklärung des Umsatzes im Bauhauptgewerbe in Deutschland y_i (in Milliarden Euro) durch die Lohn- und Gehaltssumme im Bauhauptgewerbe in Deutschland x_i (in Milliarden Euro) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \dots, n\}$$

Aus vorliegenden Daten zu den Jahren 2005–2012 wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.8207 -1.1130 -0.0814  1.8445  3.2378

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  -29.558     21.821  -1.355  0.22434
x              6.038      1.149   5.256  0.00191 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.82 on 6 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8216,       Adjusted R-squared:  0.7918
F-statistic: 27.63 on 1 and 6 DF,  p-value: 0.001908
```

(a) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(b) Welcher Anteil der Gesamtvarianz des Umsatzes im Bauhauptgewerbe in Deutschland wird durch das lineare Modell erklärt?

(c) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.10$, ob β_1 signifikant von Null verschieden ist.

(d) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.001$, ob β_2 signifikant positiv ist.

(e) Welche Umsatzhöhe im Bauhauptgewerbe (in Milliarden Euro) prognostiziert das Modell für ein Jahr mit einer Lohn- und Gehaltssumme von 20 (in Milliarden Euro)?

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = -29.558$, $\widehat{\beta}_2 = 6.038$

(b) 0.8216

(c) β_1 ist nicht signifikant von Null verschieden.

(d) β_2 ist signifikant positiv.

(e) 91.202

Aufgabe 9 (6 + 2 + 2 + 3 + 5 = 18 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 25$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{25} y_i = 224.942; \quad \sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 2625.587; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i = 87.542;$$

$$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 354.961; \quad \sum_{i=1}^{25} x_i \cdot y_i = 666.095$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß R^2.

(c) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(d) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(e) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für $\mathrm{E}(y_0)$ gegeben $x_0 = 5$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 17.7919$, $\widehat{\beta}_2 = -2.5114$

(b) $R^2 = 0.50755$

(c) $\widehat{\sigma}^2 = 12.8815$

(d) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 3.7779$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.26608$

(e) $[3.052, 7.418]$