Wirtschaftswissenschaftliches Prüfungsamt

BACHELOR-STUDIENGANG
SCHLIESSENDE STATISTIK
SOMMERSEMESTER 2012

Aufgabenstellung und Ergebnisse

Dr. Martin Becker

Hinweise für die Klausurteilnehmer

- Kleben Sie bitte **sofort** Ihr Namensschild auf obige Markierung!
- Die Klausur besteht aus insgesamt 9 Aufgaben. Prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplares nach; spätere Reklamationen können nicht berücksichtigt werden.
- Es sind insgesamt 120 Punkte (= 16 + 12 + 8 + 18 + 8 + 15 + 14 + 5 + 24) erreichbar.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Taschenrechner (auch grafikfähig und programmierbar), 2 selbsterstellte DIN-A4 Blätter bzw. 4 selbsterstellte (einseitige) DIN-A4 Seiten. Benötigte Tabellen zur Normal- und t-Verteilung finden Sie am Ende dieses Klausurheftes.
- Bei der Korrektur werden **nur** die Lösungen auf den Seiten 1–10 berücksichtigt. Das letzte Blatt (Tabellen zur Normal- und t-Verteilung) darf abgetrennt werden.
- Bei mehreren Lösungsvorschlägen muss die gültige Lösung eindeutig gekennzeichnet sein.
- Mit Ausnahme der Multiple-Choice-Aufgaben muss der Lösungsweg klar ersichtlich sein.

Bewertungsteil — Bitte nicht beschreiben							
Aufgabe	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	Σ
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
Σ							

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Markieren Sie jeweils mit einem Kreuz pro Aussage im betreffenden Kästchen, ob die unten stehenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Richtige Antworten geben +2 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aussagen 0 Punkte (Aussagen mit zwei Kreuzen zählen als nicht bearbeitet!).
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

	Aussage	wahr	falsch
1.	Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu einer normalverteilten Zufallsvariablen Y. Dann besitzen $X_1, \ldots, X_n$ stets übereinstimmende Erwartungswerte.	■	□
2.	Sei $\widehat{\theta}$ eine Schätzfunktion für θ. Dann ist $\widehat{\theta}$ genau dann erwartungstreu für θ, wenn $\mathsf{Bias}(\widehat{\theta}) \neq 0$ gilt.	□	■
3.	Sind für $n \in \mathbb{N}$ Schätzfunktionen T_n gegeben mit $\mathrm{E}(T_n) = \theta$, so ist die Familie von Schätzfunktionen T_n stets konsistent im quadratischen Mittel für θ.	□	■
4.	Ist $X_1, \ldots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y mit $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, so gibt das (symmetrische) Schwankungsintervall für $\overline{X}$ in Abhängigkeit der Verteilungsparameter μ und σ sowie einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha \in (0, 1)$ einen Bereich an, in dem sich $\overline{X}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ realisiert.	■	□
5.	Bei einem zweiseitigen Gauß-Test von $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ wird der kritische Bereich K zum Signifikanzniveau α gerade so konstruiert, dass die Teststatistik bei Gültigkeit von $\mu = \mu_0$ mit Wahrscheinlichkeit α einen Wert in K annimmt.	■	□
6.	Bei einem rechtsseitigen Gauß-Test von $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ kann die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art für $\mu \leq \mu_0$ durch die Gütefunktion $G(\mu)$ berechnet werden.	■	□
7.	Für $\alpha \in (0, 1)$ gilt für die Quantile der χ^2-Verteilung der Zusammenhang $\chi^2_\alpha = -\chi^2_{1-\alpha}$.	□	■
8.	Im einfachen linearen Regressionsmodell $$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \quad (i \in \{1, \ldots, n\})$$ wird stets $\mathrm{E}(u_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ angenommen.	■	□

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Markieren Sie jeweils die korrekte Antwort mit einem Kreuz im betreffenden Kästchen. Es ist jeweils genau ein Kreuz korrekt.
Richtige Antworten geben +3 Punkte, falsche Antworten −1 Punkt, nicht bearbeitete Aufgabenteile 0 Punkte (Aufgabenteile mit mehr als einem Kreuz zählen als nicht bearbeitet!).
Die Aufgabe wird insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet!

1. Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe vom Umfang n zu Y mit $\mathrm{E}(Y) = \mu$ und $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$. Dann gilt für die Verteilung von $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$:

   (a) $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$ und $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2$ ☐

   (b) $\mathrm{E}(\overline{X}) = n \cdot \mu$ und $\mathrm{Var}(\overline{X}) = n \cdot \sigma^2$ ☐

   (c) $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$ und $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ ■

   (d) $\mathrm{E}(\overline{X}) = \dfrac{\mu}{n}$ und $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2$ ☐

2. Auf Grundlage zweier unabhängiger einfacher Stichproben $X_1^A, \dots, X_{n_A}^A$ vom Umfang n_A zu Y^A und $X_1^B, \dots, X_{n_B}^B$ vom Umfang n_B zu Y^B soll unter der Annahme, dass Y^A und Y^B jeweils normalverteilt sind mit unbekannter, aber übereinstimmender Varianz, mit einem Signifikanztest überprüft werden, ob $\mathrm{E}(Y^A) \neq \mathrm{E}(Y^B)$ gilt. Zur Untersuchung dieser Fragestellung sind die folgenden aus der Vorlesung bekannten Verfahren geeignet:

   (a) Nur Varianzanalyse ☐

   (b) Nur t-Differenzentest für verbundene Stichproben ☐

   (c) Nur 2-Stichproben-t-Test für den Mittelwert ☐

   (d) Varianzanalyse und (äquivalent) 2-Stichproben-t-Test für den Mittelwert ■

3. Als p-Wert zur realisierten Teststatistik eines zweiseitigen Gauß-Tests für den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit bei bekannter Varianz erhält man $p = 0.07553$. Dann gilt:

   (a) Die Nullhypothese ist bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ abzulehnen, bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ jedoch nicht abzulehnen. ☐

   (b) Die Nullhypothese ist bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ abzulehnen, bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ jedoch nicht abzulehnen. ☐

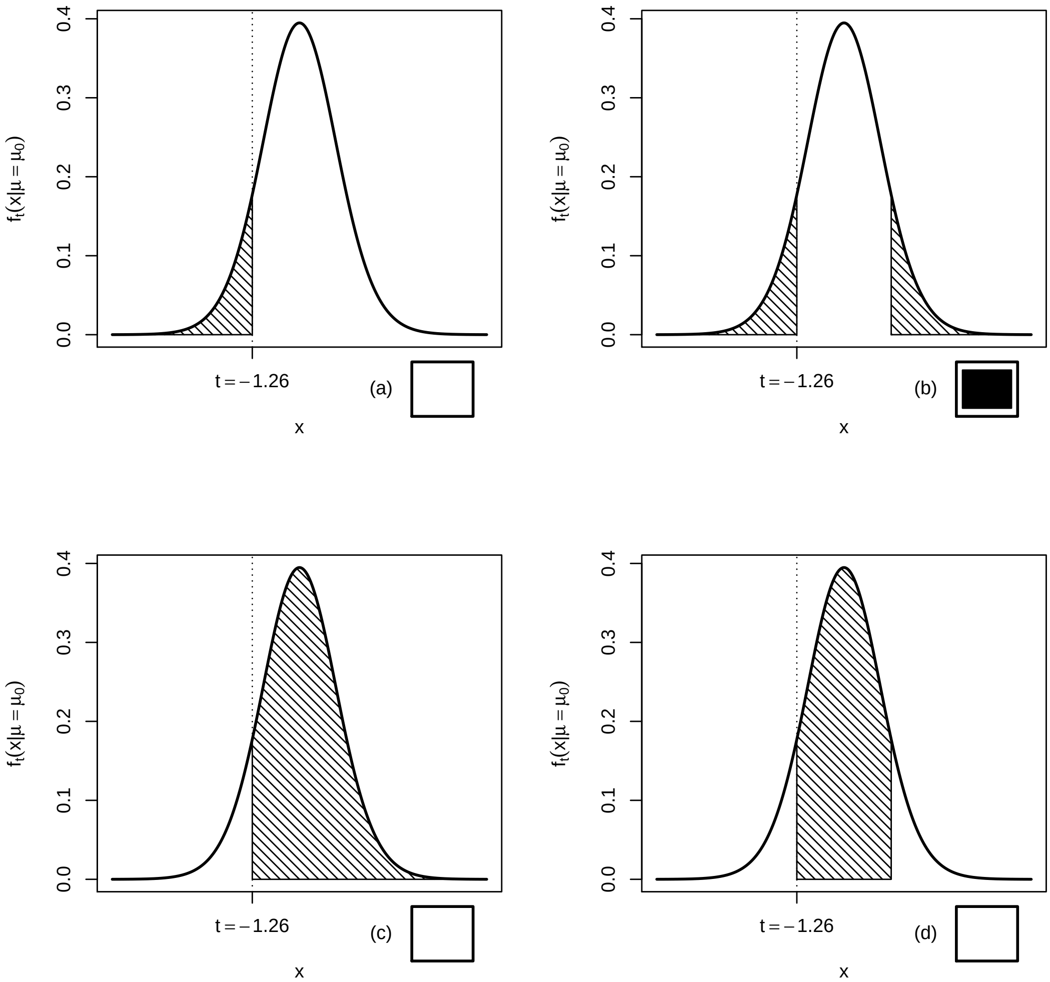
   (c) Die Nullhypothese ist sowohl bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ als auch bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ abzulehnen ☐

   (d) Die Nullhypothese ist weder bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.01$ noch bei einem Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ abzulehnen. ■

4. Sei $X_1, \ldots, X_{25}$ eine einfache Stichprobe zu einer $N(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen Y mit unbekannten Parametern μ und σ. Auf der Grundlage einer Stichprobenrealisation zu einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 25$ soll

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 10 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0 = 10$$

getestet werden. Als realisierte Teststatistik erhält man $t = -1.26$. Markieren Sie die Abbildung, welche den p-Wert in der beschriebenen Situation korrekt als Inhalt der schraffierten Fläche unter der Dichtefunktion der Verteilung der Teststatistik unter H_0 (für $\mu = \mu_0$) darstellt.



Aufgabe 3 (6 + 2 = 8 Punkte)

Die Verteilung einer Zufallsvariablen Y sei in Abhängigkeit des unbekannten Parameters $\lambda > 0$ durch die folgende Dichtefunktion gegeben:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\lambda^2} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\lambda^2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Parameter λ soll auf Grundlage einer einfachen Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ vom Umfang n geschätzt werden.

(a) Bestimmen Sie den Schätzer $\widehat{\lambda}_{ML}$ nach der Maximum-Likelihood-Methode.

(b) Man kann zeigen, dass $\mathrm{E}(Y) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \cdot \lambda$ gilt. Bestimmen Sie damit den Schätzer $\widehat{\lambda}_{MM}$ nach der Methode der Momente.

Hinweise:

- *Beachten Sie, dass Sie Teil (b) auch ohne die Bearbeitung von Teil (a) lösen können.*
- *Falls sich der ML-Schätzer als lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion bestimmen lässt, muss* **nicht** *überprüft werden (z.B. mit Hilfe der 2. Ableitung), ob tatsächlich eine Maximalstelle vorliegt.*

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\lambda}_{ML} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n}}$.

(b) $\widehat{\lambda}_{MM} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\overline{x}$.

Aufgabe 4 (7 + 3 + 5 + 3 = 18 Punkte)

Bei der Abfüllung von Styroporkleber sei anzunehmen, dass die verwendete Maschine mit einer Varianz von $0.05^2 = 0.0025[kg^2]$ normalverteilte Klebermengen abfüllt. In einer routinemäßigen Überprüfung des Qualitätsmanagements soll untersucht werden, ob die mittlere Abfüllmenge der verwendeten Maschine von dem Soll-Inhalt von $4\,[kg]$ abweicht. Die Überprüfung soll mit einem statistischen Test erfolgen. Hierzu werden der Produktion 25 Klebereimer entnommen, deren gemessene Füllmengen $x_1, \ldots, x_{25}$ als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang 25 zur annahmegemäß $N(\mu, 0.05^2\,[kg^2])$-verteilten Abfüllmenge betrachtet werden können. Als Stichprobenmittelwert ergibt sich dabei

$$\overline{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = 4.023\,[kg]\ .$$

(a) Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die mittlere abgefüllte Klebermenge von dem Soll-Inhalt von $4\,[kg]$ abweicht. Fassen Sie das Ergebnis des Tests in einem Antwortsatz zusammen.

(b) Berechnen Sie den p-Wert zum Test aus Teil (a).

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, falls $\mu = 4.01\,[kg]$ beträgt?

(d) Geben Sie auf Basis der Stichprobenrealisation ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittlere Abfüllmenge zur Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.90$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $N = 2.3 \in (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

Der Test kommt also zum Ergebnis, dass die mittlere abgefüllte Klebermenge von dem Soll-Inhalt von $4\,[kg]$ abweicht.

(b) p-Wert: 0.0214

(c) Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art für $\mu = 4.01$: 0.83

(d) Realisiertes symmetrisches Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$: $[4.007, 4.039]$

Aufgabe 5 (7 + 1 = 8 Punkte)

Ein Hersteller von Kaffeekapseln legt besonderen Wert auf die Präzision der abgefüllten Kaffeemenge Y, um seinen Kunden ein einheitliches Geschmackserlebnis garantieren zu können. Daher überprüft er regelmäßig mit einem statistischen Test, ob die als normalverteilt anzunehmende pro Kapsel abgefüllte Kaffeemenge eine vorgegebene maximale Standardabweichung von $\sigma = 0.5\,[g]$ nicht überschreitet, um im Bedarfsfall eine Neujustierung der Anlage durchzuführen. Da die Neujustierung mit erheblichen Kosten verbunden ist, soll der statistische Test so durchgeführt werden, dass eine Neujustierung nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% (überflüssigerweise) durchgeführt wird, falls die Maschine die maximal gewünschte Schwankung bzgl. der Abfüllmenge tatsächlich nicht überschreitet.
Eine als einfache Stichprobe zu Y vom Umfang 20 aufzufassende Entnahme aus der laufenden Produktion ergab die Realisation $(x_1, x_2, \ldots, x_{20})$. Aus dieser Realisation wurden bereits die Kennzahlen $\overline{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 17.108\ [g]$ und $s^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2 = 0.339\ [g^2]$ berechnet.

(a) Entscheiden Sie mit einem geeigneten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die Streuung der Abfüllmenge den gewünschten Maximalwert überschreitet. Formulieren Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz.

(b) Würden Sie (ohne Begründung!) dem Ergebnis des Tests aus Teil (a) auch dann (zumindest im Sinne eines asymptotischen statistischen Tests) vertrauen, wenn die Annahme der Normalverteilung von Y nicht gerechtfertigt sein sollte?

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n \backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.5	0.9	0.95	0.975	0.99
16	5.812	6.908	7.962	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\chi^2 = 25.764 \notin (30.144, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird nicht abgelehnt!

Der Test findet also keine Anzeichen für eine Erhöhung der Standardabweichung der Abfüllmenge über den Maximalwert

(b) Nein.

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Für die Mitarbeiterdisposition eines Finanzdienstleisters wurde die empirische Verteilung der Anzahl pro Minute eintreffender Kunden Y über einen längeren Zeitraum ermittelt. Es ergaben sich dabei folgende (als Realisation einer einfachen Stichprobe vom Umfang $n = 200$ aufzufassende) Werte:

Anzahl der Kunden Y pro Minute	Anzahl der Beobachtungen n_i
0	53
1	64
2	37
≥ 3	46

Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die Anzahl der pro Minute eintreffenden Kunden poissonverteilt ist. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Maximum-Likelihood-Schätzung mit Hilfe der wie oben klassierten Daten den geschätzten Parameter $\hat{\lambda} = 1.5$ lieferte.

Hinweise:

- Bekanntlich ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X einer Pois(λ)-verteilten Zufallsvariablen X gegeben durch:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} & \text{für } x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit p-Quantilen von $\chi^2(n)$-Verteilungen:

$n\backslash p$	0.01	0.025	0.05	0.5	0.9	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	4.351	9.236	11.070	12.833	15.086

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$\chi^2 = 6.7485 \in (5.991, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Der Test kommt also zur Entscheidung, dass die Annahme einer Poisson-Verteilung für die Anzahl der eintreffenden Kunden zu verwerfen ist.

Aufgabe 7 (14 Punkte)

Um die Leistungsfähigkeit von 4 Schulklassen einer Klassenstufe zu vergleichen, soll anhand der Ergebnisse einer Vergleichsarbeit untersucht werden, ob die Verteilung der von den Schülern erreichten Punktzahlen abhängig davon ist, welcher der 4 Klassen sie angehören. Zu den verschiedenen Schulklassen wurden die folgenden (fiktiven) Daten zu den erreichten Punktzahlen erhoben:

j (Klasse)	n_j	$\overline{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}^2$
1	20	16.656	5833.00
2	21	19.044	7782.05
3	23	18.837	8524.92
4	25	20.472	10759.19

Für die Durchführung der einfachen Varianzanalyse wurde hieraus bereits die Größe $SW = 1095.841$ berechnet.
Überprüfen Sie mit einer einfachen Varianzanalyse (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$) unter der Annahme, dass die erreichten Punktzahlen Realisierungen von unabhängig $N(\mu_j, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $X_{j,i} (1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq n_j)$ sind, ob die Zugehörigkeit zu den unterschiedlichen Schulklassen einen Einfluss auf die (mittlere) erreichte Punktzahl hat. Fassen Sie das Ergebnis der Varianzanalyse auch in einem Antwortsatz zusammen.

Hinweis: Verwenden Sie den folgenden Tabellenausschnitt mit 0.95*-Quantilen von* $F(m,n)$*-Verteilungen:*

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	85	86	87	88	89
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	252.817	252.834	252.851	252.868	252.884
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.484	19.484	19.484	19.484	19.484
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.559	8.558	8.558	8.558	8.557
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	5.670	5.670	5.669	5.669	5.668
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.412	4.412	4.411	4.410	4.410
85	3.953	3.104	2.712	2.479	2.322	1.432	1.430	1.429	1.428	1.427
86	3.952	3.103	2.711	2.478	2.321	1.430	1.429	1.427	1.426	1.425
87	3.951	3.101	2.709	2.476	2.319	1.428	1.427	1.426	1.424	1.423
88	3.949	3.100	2.708	2.475	2.318	1.426	1.425	1.424	1.423	1.422
89	3.948	3.099	2.707	2.474	2.317	1.425	1.423	1.422	1.421	1.420

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

$F = 4.21 \in (2.712, +\infty) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!
Die einfache Varianzanalyse kommt also zum Ergebnis, dass ein signifikanter ($\alpha = 0.05$) Einfluss der Schulklassenzugehörigkeit auf die erreichte Punktzahl besteht.

Aufgabe 8 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)

Zur Erklärung der Anzahl verkaufter Zigarettenpackungen pro Einwohner y_i durch das pro Einwohner zur Verfügung stehende Netto-Einkommen x_i (in USD) unterstellt man die Gültigkeit eines Zusammenhangs im Sinne des folgenden linearen Modells:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ i \in \{1, \dots, n\}$$

Aus für das Jahr 1971 erhobenen Daten für verschiedene Bundesstaaten der USA wurde das lineare Modell mit der Statistik-Software R wie folgt geschätzt:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-46.930 -15.941  -4.377   4.823 146.844

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 37.941958  29.820993   1.272  0.20994
x            0.024019   0.008275   2.903  0.00576 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 31.01 on 44 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1607,       Adjusted R-squared: 0.1416
F-statistic: 8.425 on 1 and 44 DF,  p-value: 0.005764
```

(a) Wie viele Bundesstaaten gingen in die Schätzung ein?

(b) Geben Sie die realisierten Kleinst-Quadrate-Schätzwerte für β_1 und β_2 an.

(c) Geben Sie den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(d) Welcher Anteil der Gesamtvarianz der Anzahl verkaufter Zigarettenschachteln wird durch das lineare Modell erklärt?

(e) Entscheiden Sie mit Hilfe des zugehörigen p-Werts zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$, ob β_2 signifikant von Null verschieden ist.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $n = 46$

(b) $\widehat{\beta}_1 = 37.942$, $\widehat{\beta}_2 = 0.024$

(c) $\widehat{\sigma}^2 = 961.6201$

(d) 0.1607

(e) β_2 signifikant von Null verschieden.

Aufgabe 9 (6 + 2 + 3 + 5 + 3 + 5 = 24 Punkte)

Zur Schätzung eines einfachen linearen Regressionsmodells

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + u_i \qquad \text{mit} \quad u_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

aus einer Stichprobe vom Umfang $n = 36$ wurden bereits die folgenden Zwischenwerte errechnet:

$$\sum_{i=1}^{36} y_i = 120.472; \quad \sum_{i=1}^{36} y_i^2 = 1057.604; \quad \sum_{i=1}^{36} x_i = 287.418;$$

$$\sum_{i=1}^{36} x_i^2 = 2363.68; \quad \sum_{i=1}^{36} x_i \cdot y_i = 851.504; \quad \sum_{i=1}^{36} \hat{y}_i^2 = 579.568.$$

(a) Schätzen Sie β_1 und β_2 mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Methode.

(b) Geben Sie mit Hilfe der bekannten erwartungstreuen Schätzfunktion für σ^2 den realisierten Schätzwert für σ^2 an.

(c) Berechnen Sie $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1}$ und $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2}$.

(d) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob β_2 signifikant negativ ist. Fassen Sie das Ergebnis auch in einem Antwortsatz zusammen.

(e) Geben Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für β_2 an.

(f) Geben Sie ein Prognoseintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0.95$ für y_0 gegeben $x_0 = 4$ an.

Ergebnisse (ohne Begründung/Rechenweg):

(a) $\widehat{\beta}_1 = 16.112$, $\widehat{\beta}_2 = -1.599$

(b) $\widehat{\sigma}^2 = 14.069$

(c) $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_1} = 13.406$, $\widehat{\sigma^2}_{\widehat{\beta}_2} = 0.2042$

(d) $t = -3.538 \in (-\infty, -1.691) = K \quad \Rightarrow \quad H_0$ wird abgelehnt!

β_2 ist also signifikant negativ.

(e) $[-2.517, -0.6807]$

(f) $[1.167, 18.265]$